Nepovinné domáce úlohy

Všetky úlohy sú 1-bodové. (Čo v žiadnom prípade neznamená, že by všetky z nich boli jednoduché.) Odovzdávať sa dajú do konca semestra alebo kým sa riešenie úlohy neodprezentuje na cvičení (v prípade, že budete chcieť vidieť, ako sa daná úloha dala riešiť).

1. Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ definujeme stopu matice ako súčet jej diagonálnych prvkov, t.j. $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Overte, či na vektorovom priestore $M_{n,n}(\mathbb{R})$ určuje predpis
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$$
skalárny súčin. (Hint: Možno vám pri tom pomôžu rovnosti $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$. Prvá z nich sa dá ľahko overiť pomocou definície súčinu, druhá je zrejmá.)

2. Pre kvadratické formy $f = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ a $g = \sum\limits_{i,j} b_{ij}x_ix_j$ definujeme kvadratickú formu $(f, g) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}b_{ij}x_ix_j$. Ukážte, že ak f a g sú kladne definitné, tak aj (f, g) je kladne definitná.

3. Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Definujme maticu $A = \|a_{ij}\|$ tak, že $a_{ij} = \langle\vec{\alpha_i}, \vec{\alpha_j}\rangle$. Dokážte, že $|A| \geq 0$ a že tieto vektory sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $|A| > 0$.

4. Nech $|\cdot|\colon V \to \mathbb{R}$ je funkcia definovaná na vektorovom priestore V nad $\mathbb{R}$, ktorá spĺňa podmienky

   (a) $|\vec{\alpha}| \geq 0$

   (b) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

   (c) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$

   (d) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (trojuholníková nerovnosť)

   (e) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$ (rovnobežníkové pravidlo)

   Ukážte, že potom existuje skalárny súčin na V taký, že $|\alpha| = \sqrt{\langle\vec{\alpha}, \vec{\alpha}\rangle}$ pre všetky $\vec{\alpha} \in V$. (Poznámka: Úplne mi bude stačiť, ak v dôkaze jednotlivých vlastností skalárneho súčinu overíte vlastnosť $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = c\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle$ pre *racionálne* c. Ak ste sa už na nejakom predmete stretli s nejakými vecami súvisiacimi s metrickými priestormi prípadne s normovanými priestormi, tak by ste mohli mať šancu to nejako rozšíriť aj na ľubovoľné c.)[1]

5. Nech V je vektorový priestor všetkých matíc typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$, nech $A \in V$ nech $T\colon V \to V$ je definované ako $T(X) = AX$. Nájdite charakteristický polynóm matice zobrazenia T a ukážte, že ak matica A je podobná s diagonálnou maticou, tak aj T je podobná s diagonálnou maticou. (Poznámka: Matica zobrazenia T síce závisí od voľby bázy priestoru V, nie je však ťažké si uvedomiť, že charakteristický polynóm ani diagonalizovateľnosť matice sa nemenia prechodom k inej báze, čiže od voľby bázy nezávisia.)

[1] Môj odhad však je, že väčšina ľudí čo chodí na Algebru 3 sa s takýmito vecami stretla málo alebo vôbec – mohli ste ich vidieť ak ste už mali predmet Matematická analýza 3.