Systémy lineárnych rovníc

1. Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc nad poľom $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & =1 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & =-3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & =1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =3 \end{array} \qquad \begin{aligned} x_1+x_2 &= 1 \\ x_1+x_2+x_3 &= 4 \\ x_2+x_3+x_4 &= -3 \\ x_3+x_4+x_5 &= 2 \\ x_4+x_5 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +x_4 & =3 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +5x_4 & =-3 \\ x_1 & +2x_2 & & -4x_4 & =-3 \\ x_1 & -x_2 & -4x_3 & +9x_4 & =22 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +5x_4 & =3 \\ x_1 & +5x_2 & -9x_3 & +8x_4 & =1 \\ 5x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +5x_4 & =12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & -5y & +3z & +t & =5 \\ 3x & -7y & +3z & -t & =-1 \\ 5x & -9y & +6z & +2t & =7 \\ 4x & -6y & +3z & +t & =8 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrl} x & +2y & +4z & -3t & =0 \\ 3x & +5y & +6z & -4t & =0 \\ 4x & +5y & -2z & +3t & =0 \\ 3x & +8y & +24z & -19t & =0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} x & +4y & -2z & +8t & =12 \\ & y & -7z & +2t & =-4 \\ & & 5z & -t & =7 \\ & & z & +3t & =-5 \end{array}$$

2. Riešte v $\mathbb{Z}_5$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&3&1 \\ 1&2&4&0&2 \\ 2&1&3&4&3 \\ 3&0&4&4&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 3&1&2&2&1 \\ 4&4&2&1&0 \\ 0&1&2&4&1 \\ 2&1&1&2&3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&4&1&1&2 \\ 3&3&3&2&1 \\ 1&4&2&1&1 \\ 4&2&0&3&2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&2&4 \\ 2&3&1&1&3 \\ 4&3&1&3&2 \\ 3&4&3&2&1 \end{array}\right)$
3. Riešte v $\mathbb{R}$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&-2&1&11 \\ 1&1&-3&7 \\ 11&-4&-3&10 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 3&-1&2&7 \\ 1&0&-1&-2 \\ 2&1&1&7 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1 \\ -1&3&-2&3 \\ 0&5&-5&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&0 \\ 4&1&-1&2 \\ 1&2&4&0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&-3&0 \\ 1&-3&-1&0 \\ 2&1&-4&0 \end{array}\right)$
Riešenie: a) nemá riešenie, b) (1,2,3) c) $(t-\frac{3}{5}, t+\frac{4}{5}, t)$, d) $(\frac{20}{47}, \frac{6}{47}, -\frac{8}{47})$, e) $(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t)$
4. Riešte v $\mathbb{Z}_7$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&5 \\ 0&1&1&1&6 \\ 3&1&2&3&0 \\ 0&3&6&1&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&0 \\ 2&1&0&3&1 \\ 3&1&1&1&5 \\ 0&1&2&3&6 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&4&1&4 \\ 1&3&3&1&5 \\ 4&1&5&1&6 \\ 2&3&1&4&2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1 \\ 2&1&2&3&2 \\ 3&1&1&1&1 \\ 0&6&5&3&3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1 \\ 2&3&1&4&2 \\ 1&1&0&1&1 \\ 0&4&4&1&0 \end{array}\right)$
5. Nájdite reálne čísla a, b, c tak, aby graf funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi (1,2), (-1,6) a (2,3).
6. Nájdite hodnotu parametra $b \in \mathbb{R}$, pre ktorú má daná sústava riešenie. Pre túto hodnotu aj vyjadrite množinu riešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= b \\ 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= 4 \end{aligned}$$

7. V závislosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ riešte systém daný maticou:
a) $\left(\begin{array}{cc|c} a&1&a^2 \\ 1&a&1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cc|c} a&1&a^3 \\ 1&a&1 \end{array}\right)$
8. Ako vyzerajú, v závislosti od parametra p, riešenia sústavy danej maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} p&1&1&1&1 \\ 1&p&1&1&1 \\ 1&1&p&1&1 \\ 1&1&1&p&1 \end{array}\right)$

9*. O sústave n rovníc o n neznámych nad poľom $\mathbb{R}$ vieme, že jej koeficienty tvoria aritmetickú postupnosť (ako napríklad pre maticu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right)$) a že táto sústava má jediné riešenie. Nájdite riešenie sústavy.