

## Skalárny súčin

- (i)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle$ ,
- (ii)  $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$ ,
- (iii)  $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ ,
- (iv) ak  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ , tak  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$ .

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$$

- (a)  $|\vec{\alpha}| \geq 0$
- (b)  $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
- (c)  $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$
- (d)  $|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$  (Schwarzova nerovnosť)
- (e)  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$  (trojuholníková nerovnosť)

1. Zistite, či daný predpis určuje skalárny súčin na  $\mathbb{R}^3$ . Nech  $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$  a  $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$ .
  - a)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + 3a_2b_2 - a_3b_3$
  - b)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$
  - c)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_2 + 2a_2b_2 + a_3b_3$
  - d)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
  - e)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
  - f)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
  - g)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
  - h)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_2 + a_2b_1$
  - i)  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$
2. Ukážte, že pre ľubovoľnú symetrickú maticu  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  predpis  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$  definuje skalárny súčin na  $\mathbb{R}^n$ .
3. Overte či predpis
  - a)  $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
  - b)  $\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$určuje skalárny súčin na priestore  $P_2$  všetkých polynómov stupňa najviac 2 nad poľom  $\mathbb{R}$ .
4. Zistite, či  $\sin \pi x$  a  $\cos \pi x$  sú kolmé v priestore  $C(0, 1)$  so skalárnym súčinom z úlohy 7.1.5(3); t.j.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Akú majú tieto vektory veľkosť?

5. Overte, že v priestore  $C(0, 2\pi)$  všetkých spojitéch funkcií z uzavretého intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  do  $\mathbb{R}$  so skalárnym súčinom  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$  sú ľubovoľné dve rôzne funkcie z množiny  $\{1, \sin nx, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$  na seba kolmé. (Po vynormovaní by sme dostali množinu funkcií, ktorá má v tomto priestore do istej miery podobné vlastnosti ako ortonormálna báza v konečnorozmerných priestoroch. Tento systém funkcií je dôležitý v matematickej analýze v súvislosti s *Fourierovými radmi*.)

6. Dokážte, že v ľubovoľnom euklidovskom priestore platí:
- $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$  (Pytagorova veta)
  - $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$  (kosínová veta)
  - $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$  (rovnobežníkové pravidlo)
7. LAG1 7.4.3(3): Dokážte, že ak  $S$  je vektorový podpriestor euklidovského vektorového priestoru, tak  $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$ .
8. Pre štvorcovú maticu typu  $n \times n$  definujeme stopu matice ako súčet jej diagonálnych prvkov, t.j.  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Overte, či na vektorovom priestore  $M_{n,n}(\mathbb{R})$  určuje predpis

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^T)$$

skalárny súčin. (Hint 1: Pokúste sa vyjadriť hodnotu  $\langle A, B \rangle$  pomocou prvkov matíc  $A, B$ . Hint 2: Možno vám pri tom pomôžu rovnosti  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  a  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^T)$ . Prvá z nich sa dá ľahko overiť pomocou definície súčinu, druhá je zrejmä.)

9. Nájdite bázu a dimenziu  $S^\perp$  pre daný podpriestor  $S$  priestoru  $\mathbb{R}^4$ :
- $S = [(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)]$
  - $S = [(1, 5, 4, 3), (2, -1, 2, -1)]$
  - $S = [(1, 2, 1, 1), (2, 1, -1, -1)]$
  - $S = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$
  - $S = [(2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 2, 1)]$
  - $S = [(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 1)]$
10. Nájdite ortogonálnu bázu priestoru  $V = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$ .
11. Ukážte, že pre ľubovoľný podpriestor  $S$  euklidovského vektorového priestoru  $V$  platí  $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$ . (Hint: Skúste si uvedomiť, ktorú z inklúzií medzi  $S$  a  $S^\perp$  sme v dôkaze, že  $S^{\perp\perp} = S$  platí v konečnorozmerných priestoroch, dokázali bez použitia predpokladu o konečnorozmernosti. Túto inklúziu použijete raz pre  $S$  a raz pre  $S^\perp$ .)
- 12\*. Ukážte, že ak  $|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia definovaná na vektorovom priestore  $V$  nad  $\mathbb{R}$ , ktorá spĺňa podmienky (a), (b), (c) a (e) i rovnobežníkové pravidlo, tak existuje skalárny súčin na  $V$  taký, že  $|\alpha| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$  pre všetky  $\vec{\alpha} \in V$ .
13. Ukážte, že funkcia  $|\cdot|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $|(x_1, \dots, x_n)| = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\}$  spĺňa podmienky (a), (b), (c) a (e), ale neexistuje skalárny súčin na  $\mathbb{R}^n$  taký, že  $|\alpha| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$  (pre všetky  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ ).
14. V  $\mathbb{R}^4$  so štandardným skalárnym súčinom nájdite vyjadrenie vektora  $(4, 1, 1, 6)$  ako súčtu vektora z podpriestoru  $L$  a vektora z  $L^\perp$ , ak  $L = [(1, 2, -2, -1), (2, 3, 3, 2), (1, 1, 2, 1)]$ .
15. V priestore  $\mathbb{R}^4$  so štandardným skalárnym súčinom nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor

$$S = [(1, 0, 2, -2), (1, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)].$$

16. V priestore  $\mathbb{R}^4$  so štandardným skalárnym súčinom nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor

$$S = [(3, 2, 2, -1), (4, 2, 4, -3)].$$