Prednáškové úlohy č. 5 a 6

1. 1.5.17(4) Nech $(\mathbb{Z}_2, +)$ je grupa zvyškov celých čísel po delení číslom 2 (poz. 1.3.4.(3)). Dokážte, že každý homomorfizmus zo $\mathbb{Z}_2$ do grupy $\mathbb{Z}$ s operáciou sčitovania zobrazí $1 \in \mathbb{Z}_2$ na $0 \in \mathbb{Z}$.

   Návod: Ak $f\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ je homomorfizmus grúp, uvažujte o $f(1) + f(1)$.

1. Dôkaz vety 1.6.9: Pre každú podgrupu H grupy celých čísel s operáciou sčitovania jestvuje celé nezáporné číslo m také, že $H = m\mathbb{Z}$.

2. 1.6.12(3) Napíšte tabuľku binárnej operácie faktorovej grupy $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

3. 1.6.12(4) Nech G je konečná abelovská grupa a H je jej podgrupa. Môže mať faktorová grupa G/H viac prvkov ako grupa G?

4. 1.6.12(6) Nech G je komutatívna grupa a H jej podgrupa. Dokážte, že predpis, ktorý $g \in G$ priradí $[g] \in G/H$ definuje epimorfizmus $p : G \to G/H$ (p sa volá *kanonická projekcia* grupy G na faktorovú grupu G/H). Čo je $\ker(p)$?