Prednáškové úlohy č. 7 a 8

1. Dôkaz vety 1.7.6: Nech $m \in \mathbb{N}$ je aspoň 2. Potom okruh $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ je poľom práve vtedy, keď m je prvočíslo (teda práve vtedy, keď m nemá okrem 1 a m iné delitele).

2. 1.7.8(3) Dokážte, že v okruhu s jednotkou, ktorý má aspoň dva prvky, je $-1 \neq 0$.

3. 1.7.8(4) Prečo okruh polynómov $\mathbb{R}[t]$ nie je poľom?

4. 1.7.8(7) Na $\mathbb{R}^2$ definujme operácie $+$ resp. $\cdot$ takto: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ resp. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$. Je $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ poľom?

5. 1.7.8(10) Pre každý prvok a komutatívneho okruhu R s jednotkou 1 definujme jeho n-tú ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) mocninu induktívne: $a^0 = 1$, $a^n = a^{n-1} \cdot a$. Dokážte, že
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$
pre všetky $a, b \in R$ a všetky $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vyrátajte $(-1)^n \cdot a$ pre $a \in R$.

1. 2.1.18(2) Dokážte, že $\mathbb{C}$ (so zvyčajným sčitovaním komplexných čísel a so zvyčajným násobením komplexných čísel reálnymi) je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ a tiež to, že $\mathbb{C} = [1, i]$.

2. 2.1.18(3) Je vektorovým podpriestorom v $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) množina takých usporiadaných n-tíc $(x_1, \ldots, x_n)$, že všetky $x_1, \ldots, x_n$ sú celé čísla?

3. 2.1.18(5) Nech R je pole. Dokážte, že $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ je vektorový podpriestor v R^4, ale $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1\}$ nie je vektorový podpriestor v R^4.

4. 2.1.18(9) Nech $V_1, \ldots, V_k$ sú vektorové priestory nad poľom R (nemusia byť rôzne). Dokážte, že sčitovanie po zložkách a násobenie prvkov z $V_1 \times \cdots \times V_k$ prvkami z R po zložkách urobia z $V_1 \times \cdots \times V_k$ vektorový priestor nad R (hovorí sa o ňom ako o súčine priestorov $V_1, \ldots, V_k$).