Prednáškové úlohy č. 20 a 21

1. 4.4.6(5) Vyrátajte $f(1, 2, -1)$, ak lineárne zobrazenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dané predpisom
$$f(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. 4.4.6(6) Nájdite jadro lineárneho zobrazenia, ktorého matica je
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

3. 4.5.6(2) Zistite, či je lineárnym izomorfizmom zobrazenie
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = (2a - b + c, 3a + 5b - c, 5a + b + c).$$

4. 4.5.6(3) Nájdite všetky $\epsilon \in \mathbb{R}$, pre ktoré je zobrazenie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ injektívne:
$$g(x, y, z) = (2x + y + z, -x + \epsilon y + 10z, \epsilon x - y - 6z, 5x + 2y + z).$$

5. 4.5.6(5) Nech A a B sú matice dvoch lineárnych izomorfizmov $R^n \to R^n$. Rozhodnite o pravdivosti výrokov
(a) $A + B$ je maticou lineárneho izomorfizmu;
(b) AB je maticou lineárneho izomorfizmu.

6. 4.5.6(8) Nech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(a, b) = (2a-3b, a+b, -2a+b)$, $g = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(a, b, c) = (2a - b + c, b - c, a + b - c)$. Je zobrazenie $g \circ f$ injektívne?

1. 4.6.11(2) Vyrátajte inverznú maticu k matici
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

2. 4.6.11(3) Nech $n \in \mathbb{N}$. Nájdite inverznú maticu k matici
$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 4.6.11(4) Pre každé $n \in \mathbb{N}$ vyriešte maticovú rovnicu
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 4.6.11(8) Vyrátajte maticu $B^{-1} \cdot A^{-1}$, ak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

5. 5.1.6(2) Presvedčte sa, že jedným z riešení reálneho lineárneho systému

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

je $(1, 1, -1, -1) \in \mathbb{R}^4$. S využitím 5.1.4 dokážte, že iné riešenia tento systém nemá.

6. 5.1.6(3) Aký je maticový zápis lineárneho systému

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 7 \\ -2x_1 - x_3 + 4x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

nad $\mathbb{R}$? Vyrátajte hodnosť matice, resp. rozšírenej matice tohto systému.