Prednáškové úlohy na odovzdávanie písomne

Úlohy z tohoto zoznamu sa dajú odovzdávať písomne. Prihlasuje sa na ne štandardným spôsobom. (Týka sa to skupiny 1MAT. Aspoň jednu úlohu treba odprezentovať na cviku, písomne sa dá odovzdať iba jedna úloha.) Odovzdané úlohy ohodnotím a budú sa rátať do výslednej známky z cvičenia ako keby ste ich prezentovali na cviku.

1. 1.1.19(7) Pre zobrazenia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definujme ich súčet ako zobrazenie
$$f + g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
a súčin ako zobrazenie
$$f \cdot g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$
Je súčet, resp. súčin ľubovoľných dvoch bijekcií zo $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Z}$ znova bijekcia?

   Nad analogickými otázkami sa zamyslite pre analogicky definovaný súčet, resp. súčin dvoch zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, resp. dvoch zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{Q}$, resp. dvoch zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.
2. 1.1.19(8) Nech M je n-prvková množina. Prečo neexistuje bijekcia medzi M a množinou všetkých podmnožín v M?
3. 1.2.9(1) Na $\mathbb{R}$ definujme binárnu operáciu $*$ predpisom $x * y = x \cdot y^2$ (kde $\cdot$ je násobenie reálnych čísel). Má táto operácia neutrálny prvok? Ak má, nájdite ho. Je operácia $*$ asociatívna? Je komutatívna?
4. 1.2.9(7) Je binárna operácia $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $*(x, y) = x^2 - y^2$, asociatívna? Je komutatívna?
5. 1.3.6(2) Sú kladné racionálne čísla s operáciou zvyčajného násobenia grupou?
6. 1.3.6(3) Dokážte, že grupa $(G, \cdot)$ je komutatívna, ak $x \cdot x = 1$ pre každé $x \in G$.

   Návod: pouvažujte o $(x \cdot y) \cdot (y \cdot x)$.
7. 1.3.6(4) Dokážte, že nenulové komplexné čísla s operáciou zvyčajného násobenia tvoria grupu.
8. 1.3.6(8) Nech $(G, \cdot)$ je grupa. Dokážte, že jediný prvok $x \in G$ taký, že $x \cdot x = x$ je neutrálny prvok.
9. 1.4.6(1) Označme L množinu komplexných čísel, ktoré majú absolútnu hodnotu 2. Zistite, či je L podgrupou grupy nenulových komplexných čísel s operáciou násobenia.
10. 1.4.6(5) Nájdite všetky podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$.

11. 1.4.6(6) Dokážte, že prienik dvoch podgrúp danej grupy je tiež jej podgrupou.

12. 1.4.6(7) Je pravda, že zjednotenie ľubovoľných dvoch podgrúp danej grupy je jej podgrupou?

13. 1.4.6(9) Dokážte, že grupa celých čísel s operáciou sčitovania má nekonečne veľa podgrúp.

14. 1.5.17(1) Prečo sa nedajú nájsť také dve grupy G, H, aby nejestvoval žiadny homomorfizmus z G do H?

15. 1.5.17(3) Prečo nemôže jestvovať epimorfizmus z grupy racionálnych čísel s operáciou sčitovania na grupu celých čísel s operáciou sčitovania.

    Návod: taký epimorfizmus by musel voľaktoré číslo $p/q \in \mathbb{Q}$ zobraziť na 1. Pouvažujte, aké by to malo následky.

16. 1.6.12(1) Nech M, S sú neprázdne množiny (nemusia byť rôzne) a nech $f : M \to S$ je zobrazenie. Definujme reláciu $\sim$ na M takto: $x \sim y$, ak $f(x) = f(y)$. Dokážte, že $\sim$ je relácia ekvivalencie.

17. 1.6.12(5) Dokážte, že $\{0, 2\}$ je podgrupa grupy zvyškov $\mathbb{Z}_4$. Aké prvky má faktorová grupa $\mathbb{Z}_4/\{0, 2\}$? Je grupa $\mathbb{Z}_4/\{0, 2\}$ izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_2$?

18. 1.7.8(2) Dokážte, že reálne čísla $x + y\sqrt{2}$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$, tvoria okruh (so zvyčajným sčitovaním a násobením čísel).

19. 2.4.15(11) Nájdite bázu a dimenziu vektorového podpriestoru $P \subset (\mathbb{Z}_7)^4$, ak

$$P = [(1, 2, -3, 2), (2, 1, 4, -1), (1, 2, 1, 1), (1, 3, 5, -2), (1, 1, 1, 1)].$$

20. 3.2.19(9) Pre ktoré s má matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & s \\ 2+i & i & 0 \\ 1+i & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{C})$$

    hodnosť 3?

21. 4.2.4(1) Pre $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (2x-3y, -x+2y, 3x+4y)$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_3, 3x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$, vyrátajte $M_{g \circ f}$.

22. 4.2.4(3) Nech $f : R^k \to R^s$, $g : R^k \to R^s$ sú lineárne zobrazenia. Súčet $f + g$ definujeme ako zobrazenie $f + g : R^k \to R^s$, $(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ pre všetky $\vec{x} \in R^k$, a α-násobok ($\alpha \in R$) zobrazenia f definujeme ako $\alpha f : R^k \to R^s$, $(\alpha f)(\vec{x}) = \alpha(f(\vec{x}))$ pre všetky $\vec{x} \in R^k$. Rozhodnite, či vždy
    (a) $M_{f+g} = M_f + M_g$;
    (b) $M_{\alpha f} = \alpha M_f$.

23. 4.2.4(4) Určte hodnosť matice každého z lineárnych zobrazení

$$\begin{array}{ll} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, & f(a,b,c) = (2a-3b+c, a+b-2c, 3a+b), \\ g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, & g(a,b) = (2a-3b, a+b, 3a+b), \\ h:(\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^3, & h(a,b,c) = (a+b, a+c, b+c). \end{array}$$

[$h(M_f) = 3$, $h(M_g) = 2$, $h(M_h) = 2$?]

24. 4.2.4(7) Vyrátajte $f(1,1,1)$, ak viete, že lineárne zobrazenia $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má maticu

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Je pravda, že $f(1,1,1) = (4,1,1)$?]