

Priestory so skalárnym súčinom

Chceli by sme zopakovať najmä výpočet kolmého priemetu a matice projekcie. (Podobné veci budeme často robiť pri výpočte vzdialenosti afinných podpriestorov.)

- Nájdite bázu a dimenziu S^\perp pre daný podpriestor S priestoru \mathbb{R}^4 :
 - $S = [(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)]$
 - $S = [(1, 5, 4, 3), (2, -1, 2, -1)]$
 - $S = [(1, 2, 1, 1), (2, 1, -1, -1)]$
 - $S = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$
 - $S = [(2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 2, 1)]$
 - $S = [(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 1)]$
- Majme vektory $v_1 = (1, 1, 0, 1)$ a $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, ktoré generujú priestor S .
 - Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $(1, 0, -1, 0)$ do S .
 - Nájdite dva nenulové navzájom ortogonálne vektory, ktorých projekcia S je $\vec{0}$. (T.j. bude to ortogonálna báza S^\perp .)
- [P, 1370] Nájdite kolmý priemet vektora $\vec{x} = (4, -1, -3, 4)$ do podpriestoru $S = [(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)]$. [Výsledok by mal byť $(1, -1, -1, 5)$.]
- Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $S = [(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)]$.

$$[\text{Výsledok: } P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}]$$

- [P, 1372] Nájdite kolmý priemet vektora $\vec{x} = (7, -4, -1, 2)$ na podpriestor S určený systémom rovníc

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

- Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\vec{a} = (9, 3, 3, 1)$ do podpriestoru $S = [(0, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 0, 1, 2)]$. [Výsledok je $(8, 1, 5, 1)$.]
- Nájdite maticu projekcie na podpriestor $S = [(0, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 0, 1, 2)]$. [Výsledok je $P = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$]

- Nájdite ortogonálnu bázu priestoru $V = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$.
- Nech L_1 a L_2 sú podpriestory \mathbb{R}^4 zadané ako

$$L_1 = [(1, 2, 0, 1), (2, 1, 1, 1)] \quad L_2 = [(1, 1, 1, 1), (1, 3, 1, 2)].$$

- Nájdite bázy priestorov L_1^\perp a L_2^\perp . Ako by sa našli ortonormálne bázy priestorov L_1^\perp a L_2^\perp ?
 - Nájdite bázu a dimenziu prieniku $L_1 \cap L_2$.
- Nech U, V sú podpriestory priestoru so skalárnym súčinom. Ukážte, že platí

$$U^\perp \cap V^\perp = (U + V)^\perp.$$

Ukážte, že ak pracujeme v *konečnorozmernom* priestore, tak platí

$$(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp.$$

Platí niektorá z inklúzií aj bez predpokladu o konečnorozmernosti? (Poznámka: Uvedené tvrdenie neplatí v nekonečnorozmerných priestoroch, ale kontrapríklad nie je úplne jednoduchý – prinajmenšom nie s vedomosťami o priestoroch so skalárnym súčinom, ktoré ste sa učili zatiaľ.)

Literatúra

- [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.