

## Kvadratické formy

1. Nájdiť kanonický tvar danej kvadratickej formy a transformáciu premenných, ktorá ju prevedie na kanonický tvar.

- a)  $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$   
 b)  $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$   
 c)  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$   
 d)  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$   
 e)  $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$   
 f)  $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$   
 g)  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$   
 h)  $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

Riešenia: a), b), f), h)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ ; c)  $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ ; d)  $y_1^2 - y_2^2$ ; e)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$ ; g)  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$  (Transformáciu premenných som sem nedával – tá nie je určená jednoznačne.)

- 2\*. [FS, 528] Preveďte kvadratickú formu  $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} x_i x_k$  na diagonálny tvar.

[Výsledok:  $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$ ;  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$  ]

(Toto samozrejme nie je jediná možnosť.)

- 3\*. [FS, 529] Preveďte kvadratickú formu  $\sum_{1 \leq i < k \leq n} x_i x_k$  na diagonálny tvar.

4. Zistite, či predpis  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$  predstavuje skalárny súčin na  $\mathbb{R}^3$ .

a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  b)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  c)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. Pre aké hodnoty parametra  $a$  je daná kvadratická forma kladne definitná.

- a)  $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$   
 b)  $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$   
 c)  $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$   
 d)  $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$ .

Odpovede: a)  $|a| < \sqrt{\frac{5}{3}}$ , b)  $-\frac{4}{5} < a < 0$ , c), d) pre žiadne  $a$

6. Pre danú kvadratickú formu určte tie hodnoty parametra  $t \in \mathbb{R}$ , pre ktoré je kladne definitná.

- a)  $5x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - 2x_2x_3$   
 b)  $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$   
 c)  $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - 3tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3 + 2x_1x_3$   
 d)  $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + t(6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1^2) + t^2(x_1^2 + x_2^2)$

(Poznámka: Niekedy sa výpočet determinantov  $D_1, D_2, \dots$  môže zjednodušiť, ak zmeníte poradie premenných. Takáto zmena neovplyvní to, či je matica kladne definitná.)

7. Nech  $A$  je symetrická reálna matica taká, že  $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$ . (Determinanty  $D_1, \dots, D_n$  označujú rohové determinanty vystupujúce v Sylvestrovom kritériu.) Dokážte, že potom  $a_{nn} > 0$ .

8. Nech  $V$  je euklidovský vektorový priestor a  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ . Definujme maticu  $A = \|a_{ij}\|$  tak, že  $a_{ij} = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle$ . (Táto matica sa zvykne volať *Gramova matica*.) Dokážte, že  $|A| \geq 0$  a že tieto vektory sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď  $|A| > 0$ .

9. [P, 1201, 1202] Pre ktoré z uvedených kvadratických foriem existuje regulárna transformácia premenných, ktorá prevedie jednu z nich na druhú?

a)  $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$ ;  $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$ ;  $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$ ;

b)  $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$ ;  $f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$ ;  
 $f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$

10. Pre danú symetrickú maticu  $A$  nájdite diagonálnu maticu  $D$  a ortogonálnu maticu  $P$  také, že platí  $PAP^T = D$ .

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ; b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; c)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; d)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ;

e)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ; f)  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ; g)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ; h)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ ;

i)  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ;

Výsledky: a)  $\text{diag}(0, 4, 10)$ ; b)  $\text{diag}(-1, -1, 2)$ ; c)  $\text{diag}(1, 1, -1)$ ; d)  $\text{diag}(-1, -1, 5)$ ; e)  $\text{diag}(0, 0, 6)$ ; f)  $\text{diag}(-3, -3, 3)$ ; g)  $\text{diag}(-1, -1, 5)$ ; h)  $\text{diag}(0, 5, 12)$ ; i)  $\text{diag}(-3, -4, 6)$ ;

11. Nájdite (ak taká matica existuje) ortogonálnu maticu  $P$  takú, že  $PAP^T = D$  je diagonálna matica.

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

f)  $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

g)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

h)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

i)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

j)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

k)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

## Literatúra

[FS] D. K. Faddeev and I. C. Sominskii. *Zadači po vysšej algebre*. Laň, St. Peterburg, 1999.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.