

D.Ú.-sada 16

1. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $9 \mid (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$.
2. Dokážte, že $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$ platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Ak n je dokonalé, tak $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$.
3. Nech F_n označuje n -té Fibonacciho číslo (t.j. F_n je určené rekurentným predpisom $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ a počiatočnými hodnotami $F_0 = 0, F_1 = 1$.) Dokážte, že pre každé $m \in \mathbb{N}$ existuje nekonečne veľa čísel n takých, že $F_n \equiv 0 \pmod{m}$; inak povedané $m \mid F_n$.
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a) $x^2 \equiv 3 \pmod{31}$, b) $x^2 \equiv 5 \pmod{31}$, c) $x^2 \equiv 631 \pmod{1093}$.
5. Dokážte, že 5 je kvadratický zvyšok pre prvočísla tvaru $10k \pm 1$ a kvadratický nezvyšok pre prvočísla tvaru $10k \pm 3$.