Funkcie

28. februára 2017

Funkcie

Definícia

Zobrazenie (*funkcia*) z množiny A do B je podmnožina $f \subseteq A \times B$ karteziánskeho súčinu množín A a B taká, že pre každé $a \in A$ existuje práve jedno $b \in B$ s vlastnosťou $(a, b) \in f$.

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a, b) \in f$$

Zobrazenie f z A do B budeme označovať $f : A \to B$. Množinu A nazývame *definičný obor* a B *obor hodnôt* zobrazenia f.

Namiesto zápisu $(a, b) \in f$ budeme používať zápis $f(a) = b$.

Zúženie zobrazenia

Definícia

Ak $f: A \to B$ je zobrazenie a $C \subseteq A$, tak zobrazenie $f|_C: C \to B$, definované predpisom

$$f|_C(x) = f(x)$$

pre všetky $x \in C$, nazývame *zúženie zobrazenia* f na množinu C.

$$f|_C = f \cap (C \times B)$$

Skladanie zobrazení

Definícia

Ak $f : A \to B$ a $g : B \to C$ sú zobrazenia, tak zložené zobrazenie $g \circ f : A \to C$ definujeme ako zobrazenie určené predpisom:

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \text{ pre každé } a \in A.$$

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \text{ pre každé } a \in A.$$

Injekcia, bijekcia a surjekcia

Definícia

Nech $f: X \to Y$ je zobrazenie.

- f je *injektívne*, ak $(\forall x, y \in X)\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- f je *surjektívne*, ak $(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ f(x) = y$.
- f je *bijektívne*, ak je súčasne injektívne aj surjektívne.

Zloženie dvoch injekcií (surjekcií, bijekcií) je opäť injekcia (surjekcia, bijekcia).

Poznámka

Ekvivalentná definícia injekcie: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Inverzné zobrazenie

Definícia

Nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie. Ak existuje zobrazenie $g\colon B \to A$ také, že

$$g \circ f = id_A$$
$$f \circ g = id_B$$

tak hovoríme, že g je *inverzné zobrazenie* k zobrazeniu f a označujeme ho f^{-1}.

Definícia inverzného zobrazenia vlastne hovorí, že:

$$(\forall a \in A) g(f(a)) = a$$
$$(\forall b \in B) f(g(b)) = b$$

Inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Nech $f: A \to B$ je zobrazenie. Potom inverzné zobrazenie $f^{-1}: B \to A$ existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.

Vzor a obraz množiny

Definícia

Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.
Potom množinu

$$f[A] := \{f(a); a \in A\}$$

nazývame *obraz množiny A* v zobrazení f a množinu

$$f^{-1}[B] = \{a \in X; f(a) \in B\}$$

nazývame *vzor množiny B* v zobrazení f.

Vzor a obraz množiny

$$y \in f[A] \Leftrightarrow (\exists a \in A) y = f(a)$$
$$x \in f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in B$$

V prípade, že $B = \{b\}$ je jednoprvková množina, niekedy namiesto zápisu $f^{-1}[\{b\}]$ použijeme zápis $f^{-1}(b)$. (Z kontextu by malo byť zrejmé, či hovoríme o inverznej funkcii k f, alebo zápis $f^{-1}(b)$ znamená vzor jednoprvkovej množiny.)

Vzor a obraz množiny

Tvrdenie

Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ sú zobrazenia, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$, $E \subseteq Z$, $A_i \subseteq X$ a $B_i \subseteq Y$ pre každé $i \in I$. Potom platí

(i) $g \circ f[A] = g[f[A]]$;

(ii) $(g \circ f)^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[A]]$;

(iii) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ a ak f je injektívne, tak $A = f^{-1}[f[A]]$;

(iv) $f[f^{-1}[C]] \subseteq C$ a ak f je surjektívne, tak $f[f^{-1}[C]] = C$;

(v) $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ a ak f je injektívne, tak $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$;

(vi) $f[\bigcap_{i\in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i]$ a ak f je injektívne, tak $f[\bigcap_{i\in I} A_i] = \bigcap_{i\in I} f[A_i]$;

Vzor a obraz množiny

Tvrdenie

(vii) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$;

(viii) $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$;

(ix) $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$;

(x) $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$;

(xi) $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$;

(xii) $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$;

(xiii) $A \subseteq B \Rightarrow f[A] \subseteq f[B]$ *a ak f je injekcia, tak platí aj opačná implikácia;*

(xiv) $C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D]$ *a ak f je surjekcia, tak platí aj opačná implikácia;*

(xv) $f[A] \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}[C]$.

Karteziánsky súčin funkcií

Definícia

Nech $f: A \to C$, $g: B \to D$ sú zobrazenia. Potom ich *karteziánsky súčin* je zobrazenie $f \times g: A \times B \to C \times D$ určené predpisom

$$f \times g(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Karteziánsky súčin funkcií

Tvrdenie

Nech $f : A \to C$, $g : B \to D$ sú zobrazenia.

(i) *Ak f aj g sú injekcie, tak $f \times g$ je injekcia.*

(ii) *Ak f aj g sú surjekcie, tak $f \times g$ je surjekcia.*

(iii) *Ak f aj g sú bijekcie, tak $f \times g$ je bijekcia.*