Domáca úloha č. 8

Zverejnená 28.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 12.4.2018.

Za úlohu máte odpovedať na otázky:
a) Je G grupa?
b) Je H je podgrupa G?
c) Je H je normálna podgrupa G? Ak áno, tak ďalej zistite, či faktorová grupa G/H je izomorfná s grupou G'.
Svoje tvrdenia zdôvodnite! (Samozrejme v príkladoch, kde je jasné, že ide o grupu – napríklad $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ alebo podobné číselné množiny – netreba uvádzať žiadne detailné zdôvodnenie, že to je grupa. V niektorých úlohách však nie je na prvý pohľad jasné, či ide o grupu, práve v tých ma zaujíma zdôvodnenie.)

1. a) $G=(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+)$, $H=\mathbb{Z}\times\{0\}$, $G'=(\mathbb{Z},+)$;
b) $G=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ -b & a\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ b & -a\end{smallmatrix}\right);a,b\in\mathbb{R};a^2+b^2=1\}$ (s operáciou násobenia matíc), $H=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ -b & a\end{smallmatrix}\right);a,b\in\mathbb{R};a^2+b^2=1\}$, $G'=(\mathbb{Z}_2,\oplus)$

2. a) $G=(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H=\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R};x>0\}$, $G'=(\{x\in\mathbb{C};|x|=1\},\cdot)$;
b) $G=\{A\in M_{2,2}(\mathbb{R});|A|=\pm1\}$ (s operáciou násobenia matíc); $H=\{A\in M_{2,2}(\mathbb{R});|A|=1\}$; $G'=(\mathbb{Z}_2,\oplus)$

3. a) $G=(\mathbb{R},+)$, $H=\mathbb{Z}$, $G'=(\{x\in\mathbb{C};|x|=1\},\cdot)$;
b) $G=\{\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{smallmatrix}\right);\varphi\in\mathbb{R}\}$ (s operáciou násobenia matíc); $H=\{\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{smallmatrix}\right);\varphi\in\mathbb{R}\}$; $G'=(\mathbb{Z}_2,\oplus)$

4. a) $G=(\mathbb{R}^3,+)$, $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x+2y-z=0\}$, $G'=(\mathbb{R},+)$;
b) $G=\{A\in M_{2,2}(\mathbb{R});|A|\neq0\}$ (s operáciou násobenia matíc); $H=\{A\in M_{2,2}(\mathbb{R});|A|>0\}$; $G'=(\mathbb{Z}_2,\oplus)$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A-G, 2 riešia H-M, 3 riešia N-R, 4 riešia S-Z