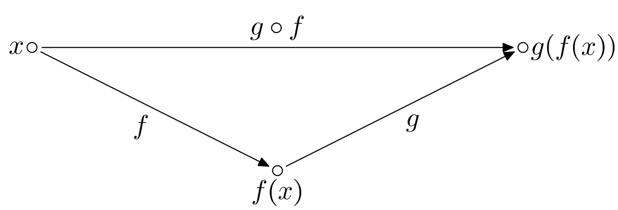
Definícia zobrazenia

1. Ak $A \neq \emptyset$, nájdite všetky zobrazenia $A \to \emptyset$ a $\emptyset \to A$. Existuje zobrazenie z $\emptyset$ do $\emptyset$?
2. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení množiny M do množiny N?
3. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje injekcií/bijekcií $M \to N$?
4. Nech A je konečná množina a $f\colon A \to A$ je zobrazenie. Dokážte:
   a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
   b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.
   Ukážte na príklade, že pre nekonečné množiny tieto tvrdenia vo všeobecnosti neplatia.

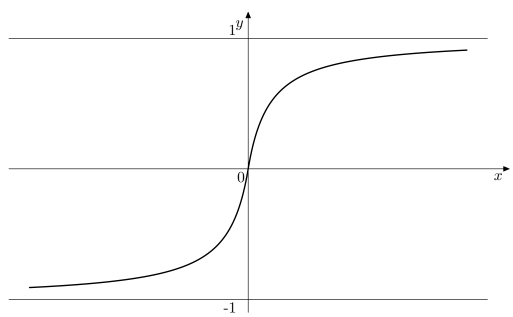
Skladanie zobrazení

Ak $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$, tak $g \circ f\colon X \to Z$ je definované ako

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



1. Pre dané zobrazenia $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? Vedeli by ste načrtnúť grafy f, g, $g \circ f$, $f \circ g$?
   a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$;
   b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$;
   c) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$;
   d) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = x^2$;
   e) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \geq 0, \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x < 0. \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \notin (-1, 1), \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x \in (-1, 1), x \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \in (-1, 1), x < 0 \end{cases}$



2. Pre dané zobrazenia $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označuje množinu prirodzených čísel)

a) $f(n)=2n$, $g(n)=\lceil n/2 \rceil$;
b) $f(n)=n+1$, $g(n)=\begin{cases} n-1 & \text{ak } n\geq 2, \\ 1 & \text{ak } n=1. \end{cases}$

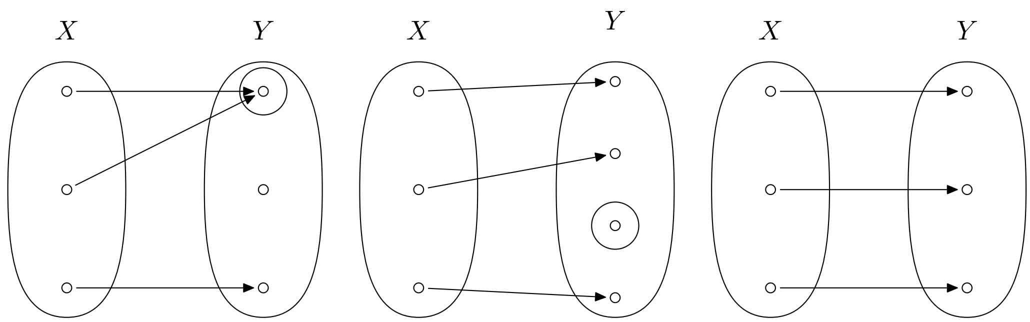
Injekcia, surjekcia, bijekcia

Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je

- *injekcia,* ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in X$ z rovnosti $f(x_1)=f(x_2)$ vyplýva $x_1=x_2$-
- *surjekcia,* ak pre ľubovoľné $y\in Y$ existuje $x\in X$, ktoré sa naň zobrazí.
- *bijekcia,* ak je injekcia aj surjekcia.

Dve ekvivalentné definície injekcie:

$$(\forall x_1, x_2 \in X) f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$
$$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$



1. Dokážte: Ak $g\circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Platí aj opačná implikácia? Musí byť f surjekcia?
2. Dokážte: Ak $g\circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.
3. Dokážte: Ak $g\circ f$ je bijekcia, tak f je injekcia a g je surjekcia.
4. Nech $f\colon X\to Y$ je zobrazenie a $X\neq\emptyset$ (t.j. X je neprázdna množina). Potom:
   a) f je injekcia práve vtedy, keď existuje g také, že $g\circ f = id_X$.
   b) f je surjekcia práve vtedy, keď existuje h také, že $f\circ h = id_Y$.
   c) K zobrazeniu f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia. (Tým sme znovu dokázali tvrdenie hovoriace, že zobrazenie je bijektívne práve vtedy, keď k nemu existuje inverzné zobrazenie.)
5. Nech $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to X$, $h\colon Y\to X$ sú zobrazenia. Ak g aj h sú inverzné zobrazenia k f, tak $g=h$.
6. Nech $f\colon X\to Y$ je surjekcia a $g,h\colon Y\to Z$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $g\circ f = h\circ f$, tak $g=h$.
7. Nech $f\colon Y\to Z$ je injekcia a $g,h\colon X\to Y$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $f\circ g = f\circ h$, tak $g=h$.
8. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X\to Y$ je surjekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g,h\colon Y\to Z$ platí: Ak $g\circ f=h\circ f$, tak $g=h$.
9. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X\to Y$ je injekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g,h\colon Z\to X$ platí: Ak $f\circ g = f\circ h$, tak $g=h$.
10. LAG 1, 1.1.19(7): Pre zobrazenia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definujme ich súčet ako zobrazenie
$$f+g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, \qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

a súčin ako zobrazenie

$$f \cdot g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Je súčet, resp. súčin ľubovoľných dvoch bijekcií zo $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Z}$ znova bijekcia?

Inverzné zobrazenia

1. Nájdite príklad zobrazenia $f\colon X \to Y$, pre ktoré existuje ľavé inverzné zobrazenie, ale neexistuje pravé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $g\colon Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$, ale neexistuje $h\colon Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$.
2. Nájdite príklad zobrazenia $f\colon X \to Y$, pre ktoré existuje pravé inverzné zobrazenie, ale neexistuje ľavé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $h\colon Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$, ale neexistuje $g\colon Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$.

Vzor a obraz množiny*

K týmto úlohám sa na cvičení pravdepodobne *nestihneme* dostať, zatiaľ ich môžete ignorovať. (Ale ak vás zaujmú, môžete skúsiť niektoré z nich vyriešiť. Každopádne sa k veciam takéhoto typu neskôr dostanete na predmete 1-MAT-140 Diskrétna matematika (1) – čiže časom sa ich budete musieť naučiť.)

Pre $f\colon X \to Y$ a podmnožiny $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ označujeme

$$f[A] = \{f(x); x \in A\}$$
$$f^{-1}[B] = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

Inak povedané:

$$y \in f[A] \Leftrightarrow (\exists a \in A) y = f(a)$$
$$x \in f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in B$$

1. Dokážte: Ak $A \subseteq B$, tak $f[A] \subseteq f[B]$.
2. Dokážte: $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$, $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
3. Ktoré z nasledujúcich tvrdení platia a ktoré neplatia? Zdôvodnite.
   a) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$
   b) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$
   c) $f[A \cap B] \supset f[A] \cap f[B]$
   d) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
   e) $f^{-1}[A \cap B] \subset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
   f) $f^{-1}[A \cap B] \supset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
   g) $f[f^{-1}[B]] = B$
   h) $f[f^{-1}[B]] \subset B$
   i) $f^{-1}[f[A]] = A$
   j) $f^{-1}[f[A]] \subset A$
   k) $g \circ f[A] = g[f[A]]$
4. Ak X je množina, tak $P(X)$ budeme označovať množinu všetkých jej podmnožín. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $g\colon P(X) \to P(Y)$ je zobrazenie definované tak, že $g(A) = f[A]$ pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq X$. Dokážte, že f je prosté práve vtedy, keď g je prosté.
5. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.
6. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[B \setminus A] = f[B] \setminus f[A]$.