Relácie ekvivalencie

Relácia na množine M je ľubovoľná podmnožina $R \subseteq M \times M$. Relácia ekvivalencie je taká relácia, ktorá je

- reflexívna: $(\forall x \in M)\ (x,x) \in R$;
- symetrická: $(\forall x, y \in M)\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in M$;
- tranzitívna: $(\forall x, y, z \in M)\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

1. Overte, či relácia R je relácia ekvivalencie na množine M.
   a) M je ľubovoľná množina, $R = M \times M$;
   b) M je ľubovoľná množina, $R = \{(x,x); x \in M\}$
   c) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Z}\}$;
   d) $M = \mathbb{Z}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
   e) $M = \mathbb{N}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
   f) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \in M \times M; |a - b| \leq 1\}$;
   g) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x^2 = y^2\}$;
   h) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, t.j. M je množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{N}$ a $R = \{(A,B) \in M \times M; A \triangle B \text{ je konečná}\}$ (t.j. množiny A a B sú v relácii R, ak ich symetrický rozdiel $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná množina);
   i) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R = \{(A,B) \in M \times M; \text{ existuje bijekcia z } A \text{ do } B\}$;
   j) $M = \mathbb{Z}$; $R = \{(x,y) \in M \times M; 3 \mid x + 2y\}$;
   k) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Q}\}$;
   l) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1)\}$;
   m) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)\}$;
   n) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1)\}$;
   o) $M = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f,g) \in M \times M; f(1) = g(1)\}$;
   p) $M = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f,g) \in M \times M; f(1) = g(0)\}$;
   q) $M = G$, kde $(G, \circ)$ je grupa, H je podgrupa grupy G a $R = \{(x,y) \in M \times M; xy^{-1} \in H\}$. Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?
   r) M je ľubovoľná množina, $f\colon M \to S$ je ľubovoľné zobrazenie a $R = \{(x,y) \in M \times M; f(x) = f(y)\}$. (=LAG1, 1.6.12(1)) Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?
2. Koľko existuje relácií ekvivalencie na trojprvkovej množine $\{0,1,2\}$?
3. Dokážte: Ak R_1 a R_2 sú relácie ekvivalencie na tej istej množine M, tak aj $R = R_1 \cap R_2$ je relácia ekvivalencie na M. (Všimnite si, že $(a,b) \in R \Leftrightarrow (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2$.)

Faktorové grupy

Ak máme komutatívnu grupu $(G, +)$ a nejakú jej podgrupu H, tak predpis[1]

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x - y \in H$$

určuje reláciu ekvivalencie na množine G.

Množinu všetkých tried tejto ekvivalencie označíme ako $[G/H]$, t.j.

$$[G/H] = \{[a]; a \in G\}.$$

Predpis

$$[a] + [b] = [a + b]$$

[1]Ak by sme označovali operáciu ako $\cdot$, tak by sme tú istú podmienku zapísali ako $xy^{-1} \in H$.

potom určuje dobre definovanú binárnu operáciu na množine G/H. Dá sa dokázať, že G/H s touto operáciou tvorí grupu. Túto grupu voláme faktorová grupa grupy $(G,+)$ podľa podgrupy H.

Veta o faktorovom izomorfizme. Nech G, G' sú grupy, navyše G je komutatívna.[2] Ak $f\colon G \to G'$ je surjektívny homomorfizmus, tak $\operatorname{Ker} f$ je podgrupa grupy G a platí

$$G/\operatorname{Ker} f \cong G',$$

t.j. faktorová grupa G podľa $\operatorname{Ker} f$ je izomorfná s G'.

1. Ukážte, že faktorová grupa G/H je izomorfná s grupou K. (Aspoň jednu úlohu skúste vyriešiť priamo pomocou definície faktorovej grupy a aspoň jednu úlohu pomocou vety o faktorovom izomorfizme.)
   a) $G = (\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$, $H = \{(x,y); x+2y=0\}$, $K = (\mathbb{R},+)$;
   b) $G = (\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$, $H = \{(x,3x); x\in\mathbb{R}\}$, $K = (\mathbb{R},+)$;
   c) $G = (\mathbb{C},+)$, $H = \mathbb{R}$, $K = (\mathbb{R},+)$;
   d) $G = (\mathbb{Z}_8,+)$, $H = 2\mathbb{Z}_4 = \{0,2,4,6\}$, $K = (\mathbb{Z}_2,+)$;
   e) $G = (\mathbb{Z}_8,+)$, $H = 4\mathbb{Z}_2 = \{0,4\}$, $K = (\mathbb{Z}_4,+)$;
   f) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $K = \{c\in\mathbb{C}; |c|=1\}$;
   g) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x\in\mathbb{R}; x>0\}$, $K = \{c\in\mathbb{C}; |c|=1\}$;
   h) $G = (\mathbb{Z},+)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z\in\mathbb{Z}\}$, $K = \mathbb{Z}_4$;
   i) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = \mathbb{R}^+$, $K = (\mathbb{Z}_2,+)$;
   j) $G = (\mathbb{R}^*,\cdot)$, $H = \{\pm 1\}$, $K = (\mathbb{R}^+,\cdot)$
2. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c\in\mathbb{C}; |c|=1\},\cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c\in\mathbb{C}; c^n=1\},\cdot)$
   a) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)/\{c\in\mathbb{C}; c^n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)/\mathbb{R}^+$ (pod $\mathbb{R}^+$ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0\notin\mathbb{R}^+$), S
   b) $(\mathbb{R},+)/\mathbb{Z}$, S/C_n, S
   c) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)/C_n$
   d) $(\{c\in\mathbb{C}; c^n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\},\cdot)/\mathbb{R}^+$, C_n
   e) $(\{c\in\mathbb{C}; c^n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\},\cdot)/C_n$, $\mathbb{R}^+$
   f) C_{12}/C_4, $\mathbb{Z}_3$
   g) $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,+)/(\mathbb{Z}_2\times\{0\})$, $\mathbb{Z}_3$
3. Nech G je komutatívna grupa a H je jej podgrupa. Ukážte, že zobrazenie $f(x) = x+h$ je bijekcia medzi H a $[x]_H$. (T.j. pre každú triedu rozkladu G podľa H máme bijekciu medzi H a $[x]_H$.)
4. S využitím predošlej úlohy dokážte, že ak G je konečná komutatívna grupa a H je jej podgrupa, tak počet prvkov H delí počet prvkov G. (T.j. $|G|$ je násobkom $|H|$.)[3]

[2] Tento predpoklad je tu iba preto, aby vôbec malo zmysel hovoriť o faktorovej podgrupe. Ak sa neskôr budete učiť o normálnych podgrupách, tak zistíte, že faktorové grupy sa dajú robiť aj pre nekomutatívne grupy. Vtedy to však nebude fungovať s ľubovoľnou podgrupou. Prinajmenšom matici by sa s tým mali stretnúť na predmete Algebra v druhom ročníku.

[3] Táto vlastnosť platí aj pre grupy, ktoré nie sú komutatívne. Neskôr sa s ňou ešte stretnete pod názvom *Lagrangeova veta.*