

Polia

- Ktoré z uvedených množín tvoria spolu s obvyklým sčítaním a násobením pole?
 - $F = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, b \geq 0\}$
 - $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
 - $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$
 - $F = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
 - $F = \{a + \sqrt{3}ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
 - $F = \{a + \frac{b}{\sqrt{2}}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
 - $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}; a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ (Hint: Možno pomôže prepísať si túto množinu do tvaru $F = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in F'\}$, kde $F' = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.)
 - $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
 - $F = \{a + b\sqrt[3]{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
 - $F = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ (Môže byť pre vás užitočný vzorec $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - vw) = \frac{1}{2}(u + v + w)((u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2)$.)¹
- V poli \mathbb{Z}_5 vyrátajte $2^{-1} + 4$, $(-2) + 4$, $2^{-1} + 3$ a $-4 \odot 3^{-1}$.
- V ľubovoľnom poli F platí:

$$\begin{aligned}
 a + b = a + c &\Rightarrow b = c \\
 (a + b)(c + d) &= ac + ad + bc + bd \\
 -(-a) &= a \\
 -0 &= 0 \\
 -(a + b) &= (-a) + (-b) \\
 (a - b)c &= ac - bc \\
 1 &\neq 0 \\
 a \cdot a = 1 &\Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1 \\
 a^2 = b^2 &\Leftrightarrow a = b \vee a = -b \\
 a \cdot (b_1 + \dots + b_n) &= a \cdot b_1 + \dots + a \cdot b_n
 \end{aligned}$$

- Na množine \mathbb{R}^+ všetkých kladných reálnych čísel zadefinujeme operácie \oplus a \odot tak, že $x \oplus y = x \cdot y$ a $x \odot y = x^y$. Ktoré z axióm polia spĺňa $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$?
- Nech na množine $M = \{0, 1\}$ sú operácie $+$ a \cdot dané tabuľkami

$+$	0	1	\cdot	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1

Ukážte, že $(M, +)$ a $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ sú komutatívne grupy a že platí distributívny zákon $(a + b)c = ac + bc$. Je $(M, +, \cdot)$ pole?

- Zistite, či $(\mathbb{R}, +, *)$, kde $+$ je obvyklé sčítanie reálnych čísel a pre každé $a, b \in \mathbb{R}$ $a * b = -2ab$, je pole.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujeme operácie $+$ a \cdot takto:
 - $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$,
 - $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
 - $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc - bd)$
 - $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (bd - ac, ad + bc)$
 Je potom $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ pole?
- Pre ktoré prvky a polia \mathbb{Z}_7 má riešenie rovnica $x^2 = a$? Koľko je takých prvkov v poli

¹Táto úloha je naozaj dosť náročná. Snáď je aspoň trochu zaujímavé vedieť, že sa dá vyriešiť pomerne jednoducho, keď už budete mať nejaké vedomosti o báze a dimenzii vektorových priestorov. Podobnými poľami sa budete zaoberať neskôr v druhom ročníku na algebre. Tiež prezradím, že rovnosť $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - vw)$ sa okrem manuálneho roznásobenia dá overiť aj použitím vhodného determinantu. O determinantoch sa budeme učiť na lineárnej algebre 1.

\mathbb{Z}_{109} ?