Prechod medzi súradnicovými systémami

Matica prechodu. Od bázy $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ k báze $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ je taká matica P typu $n \times n$, že platí

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2 + \dots + p_{1n}\vec{a}_n\\
\vec{b}_2 &= p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2 + \dots + p_{2n}\vec{a}_n\\
&\vdots\\
\vec{b}_n &= p_{n1}\vec{a}_1 + p_{n2}\vec{a}_2 + \dots + p_{nn}\vec{a}_n
\end{aligned}$$

Matica prechodu opačným smerom je P^{-1}.

Zmena súradníc vo vektorovom priestore. Ak $\vec{x}_n$ označuje súradnice vektora v novej báze a $\vec{x}_s$ jeho súradcnice v starej báze, tak máme

$$\begin{aligned}
\vec{x}_s &= \vec{x}_n P,\\
\vec{x}_n &= \vec{x}_s P^{-1}.
\end{aligned}$$

Zmena súradníc v afinnom priestore. Prechod od bázy $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k báze $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ môžeme vyjadriť ako

$$X' = XP^{-1} + B,$$

kde B sú súradnice bodu O v $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$.

Matica P tu označuje maticu prechodu od $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$, t.j. P^{-1} je matica prechodu od $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$

1. [HZK, 2.3.39] V $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sú dané afinné súradnicové sústavy $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ a $(B, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, kde $O = (0, 0, 0)$, $\vec{e}_i$ je i-ty vektor štandardnej bázy a
$$B \equiv (2, 1, 3); \qquad \vec{a}_1 = (2, 4, 1); \qquad \vec{a}_2 = (0, 4, 4); \qquad \vec{a}_3 = (1, 1, 0).$$
Nájdite rovnice určujúce prechod od súradnicovej sústavy $(B, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ k súradnicovej sústave $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Aké súradnice má bod O a vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ v súradncovej sústave $(B, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}_3)$?
2. Popíšte prechod od afinnej súradnicovej sústavy $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ k $(O', \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ pre
$$\begin{aligned}
O &= (1, 1) & O' &= (-1, 2)\\
\vec{a}_1 &= (2, 1) & \vec{b}_1 &= (-1, 1)\\
\vec{a}_2 &= (1, 2) & \vec{b}_2 &= (2, 3)
\end{aligned}$$
3. [HZK, 2.3.39] Rovnice
$$y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1; \qquad y_2 = x_2 + \dots + x_n + 1; \qquad \dots \qquad y_n = x_n + 1$$
určujú prechod od súradnicovej sústavy $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ k súradnicovej sústave $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Zistite:
a) aké rovnice dávajú prechod od $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$,
b) aké súradnice má bod O' a vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ v $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$,
c) aké súradnice má bod O a vektory $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ v $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$,
d) aké súradnice má v $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ bod M, ktorý má v $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ súradnice $(1, 1, \dots, 1)$,
e) aké súradnice má v $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ bod M, ktorý má v $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ súradnice $(1, 1, \dots, 1)$.

Literatúra

[HZK] Milan Hejný, Valent Zaťko, and Pavel Kršňák. *Geometria 1.* SPN, Bratislava, 1985.