

## Jordanov tvar

*Jordanov normálny tvar.* Každá matica nad  $\mathbb{C}$  je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Počet lineárne nezávislých vlastných vektorov k  $\lambda$  určuje počet blokov, ktoré prislúchajú k  $\lambda$ .

Veľkosti blokov by sme mohli nájsť tak, že hľadáme *zovšeobecnené vlastné vektory*, t.j. vektory také, že  $\vec{x}(A - \lambda I)^k = \vec{0}$ .

Môžeme ich zistiť aj pomocou hodnosti mocnín matice  $(A - \lambda I)$ : Počet blokov (pre vlastnú hodnotu  $\lambda$ ) veľkosti aspoň  $k$  je  $h((A - \lambda I)^{k-1}) - h((A - \lambda I)^k)$ .

Pretože matice  $A$  a jej Jordanov tvar  $J$  sú podobné, budú mať rovnaký minimálny polynóm aj charakteristický polynóm, hodnot, stopu a determinant.

Ak nie je zadané inak, vo všetkých úlohách pracujeme s maticami na  $\mathbb{C}$ .

- Nájdite  $k$ -tu mocninu zadanej matice pre ľubovoľné  $k \in \mathbb{N}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Vedeli by ste výsledok zovšeobecniť na ľubovoľné rozmery? (T.j. na matice rozmerov  $n \times n$  namiesto  $4 \times 4$ .)

- [K, Exercise 4101] Nájdite Jordanov tvar danej matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{g) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Riešenia: a) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nájdite Jordanov tvar, charakteristický polynóm a minimálny polynóm danej matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. [P, 1090–1093] Nájďte Jordanov tvar, charakteristický polynóm a minimálny polynóm danej matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Riešenia: a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Ak viete, že matica  $A$  má Jordanov tvar  $J$ , dá sa na základe toho odpovedať na zadané otázky?

$$\text{a) } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Čomu sa rovná charakteristický polynóm } \chi_A(x) \text{ a minimálny}$$

polynóm  $m_A(x)$  matice  $A$ ?

$$\text{b) } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Čomu sa rovná } h(A-I), h((A-I)^2), h((A-I)^3), h((A-I)^4)?$$

$$\text{c) } J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Je matica } A \text{ regulárna? Viete nájsť vyjadrenie matice } A^{-1}$$

v tvare  $p(A)$ , kde  $p$  je nejaký polynóm? Vedeli by ste nájsť také vyjadrenie, kde polynóm  $p$  je najnižšieho možného stupňa?

$$\text{d) } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ Je matica } A \text{ podobná s maticou } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

6. Ak má matica uvedené vlastnosti dá sa z nich už jednoznačne určiť Jordanov tvar matice  $A$ ? Ak je viacero možností pre Jordanov tvar, nájdite všetky.

a) Matica  $A$  je rozmerov  $4 \times 4$  a jej minimálny polynóm je  $m_A(x) = (x-2)^2(x-1)$ .

b)  $\chi_A(x) = x^4 - 2x^2 + 1$  a  $m_A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .

c) Matica  $A$  rozmerov  $4 \times 4$  je singularná a  $h(A-2I) = 1$ .

d) Pre maticu  $A$  rozmerov  $4 \times 4$  platí  $h(A-2I) = 2$  a  $h((A-2I)^2) = 0$ , pričom 2 je jediné vlastné číslo matice  $A$ .

7. Ukážte, že ľubovoľná štvorcová matica  $A$  je podobná s transponovanou maticou  $A^T$ . (Hint: Najprv to skúste overiť pre maticu, ktorá je v Jordanovom tvare.)

8. Čomu sa rovná  $A^{30}$  pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

(Dá sa nejakým spôsobom využiť Jordanov tvar? Vedeli by ste úlohu vyriešiť aj bez použitia Jordanovho tvaru?)

## Literatúra

- [K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry*. OPA, Amsterdam, 1996.
- [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.