Kužeľosečky

Chceli by sme zopakovať nejaké základné (v podstate stredoškolské) veci o kužeľosečkách.[1]

Dôležité je najmä to, aby ste vedeli z rovnice rozoznať typ krivky a aj ju načrtnúť. Ostatné informácie, čo sú tu spomenuté (ako dotyčnice, súradnice ohnísk, parametrizácia), berte ako niečo „navyše“ – na tomto predmete to zrejme potrebovať nebudete.

Literatúra: [ŠBP], [BPC].

Kružnica. Rovnica kružnice so stredom v bode $(0,0)$ a polomerom r: $x^2+y^2=r^2$

Parametrizácia: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

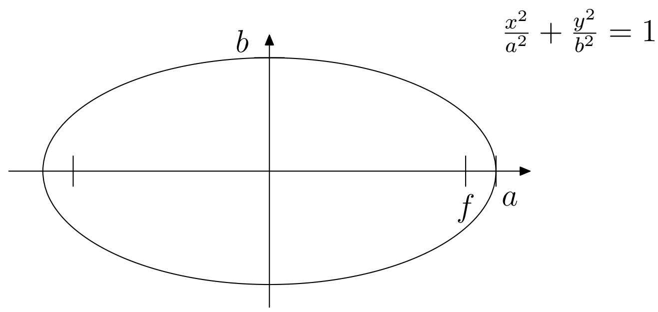
Stred v bode (m,n): $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

Dotyčnica v bode (x_0,y_0) má normálový vektor (x_0,y_0): $xx_0+yy_0=r^2$.

Elipsa. Elipsa je množina bodov, pre ktoré je súčet vzdialeností od zadaných dvoch bodov (ohnísk) konštantný. Rovnica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

predstavuje elipsu so stredom v bode $(0,0)$ a s hlavnými poloosami dĺžok a, b.



Obr. 1: Elipsa s rovnicou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a ohniskami $(0 \pm f)$

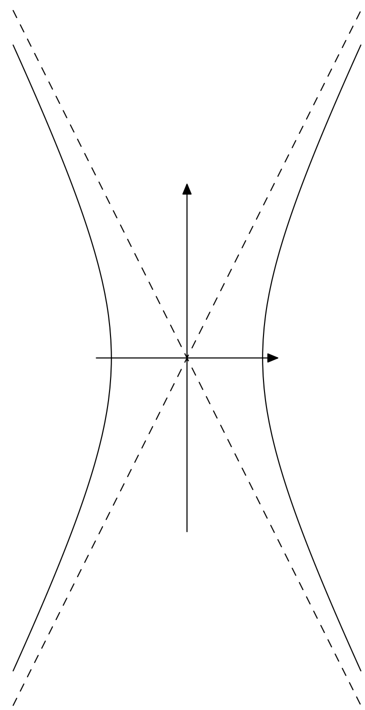
rovnica	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
parametrizácia	$x = a\cos t$, $y = b\sin t$
súradnice ohnísk	$(0,\pm f)$ pre $f=\sqrt{a^2-b^2}$
dotyčnica v (x_0,y_0)	$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

Hyperbola. Hyperbola je množina bodov, pre ktoré je rozdiel vzdialeností od zadaných dvoch bodov (ohnísk) konštantný.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

rovnica	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
asymptoty	$\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$
parametrizácia	$x = a\cosh t$, $y = b\sinh t$
ohniská	$(0,\pm f)$ pre $f=\sqrt{a^2+b^2}$
dotyčnica v (x_0,y_0)	$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

[1] Kužeľosečkami ich voláme preto, že sú to presne krivky, ktoré vieme dostať ako prienik roviny s kužeľom.



Obr. 2: Hyperbola s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a asymptotami $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$

S funkciami $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ a $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (hyperbolický sínus a kosínus), ktorými sa hyperbola dá parametricky vyjadriť, sa možno stretnete na matematickej analýze.[2]

Parabola. Parabola s ohniskom F je a určujúcou priamkou d (pričom $F \notin d$) je množina bodov, pre ktoré je vzdialenosť od priamky d a bodu F rovnaká, t.j. $|XF| = |Xd|$.

$$2py = x^2$$

rovnica	$2py = x^2$
ohnisko	$(0, \frac{p}{2})$
určujúca priamka	$y = -\frac{p}{2}$
dotyčnica v (x_0, y_0)	$p(y + y_0) = xx_0$

1. Nakreslite množinu bodov určenú zadanou rovnicou/rovnicami/nerovnicami:
   a) $x^2 + y^2 \leq 2$;
   b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,
   c) $4x^2 + 9y^2 = 36$,
   d) $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$;
   e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;
   f) $x^2 + 9y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$;

[2] Pre tieto funkcie platí $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\cosh' x = \sinh x$ a $\sinh' x = -\cosh x$. Niekedy sa dajú použiť pri výpočte integrálov pomocou substitúcie. Podobne ako substitúcia $u = a \sin x$ býva často užitočná, ak rátate nejaký integrál obsahujúci výraz $\sqrt{a^2 - x^2}$, tak sa dá často použiť substitúcia $u = a \sinh t$ ak integrál obsahuje výraz $\sqrt{a^2 + x^2}$.

h) $y = 5 - 4x - x^2$;
i) $5x^2 - 4y^2 + 20x - 48y + 1 = 0$

2. Nakreslite množinu bodov určenú podmienkami:
a) $x^2 + y^2 - 4y = 5$;
b) $x^2 + 2x + 2y^2 - 8y = 4$;
c) $x^2 + y^2 + 3x < 0$, $y < 0$;
d) $4x^2 - 4x + 9y^2 + 6y + 1 < 0$;
e) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1$;
f*) $x, y \geq 0$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2$ (Hint: Môže pomôcť po úprave sa pozrieť na výsledok v súradnicovej sústave otočenej o $\pi/4$.)
g) $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} < 6$;
h) $\left|\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36}\right| < 1$;
i) $y^2 - 9x^2 = 9$

3. Napíšte rovnicu daného útvaru:
a) Kružnica so stredom v bode $(0, 1)$ a polomerom 2.
b) Dotyčnica ku kružnici $(x-1)^2 + y^2 = 25$ prechádajúca bodm $(4, 4)$.
c) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (3, 0)$, $B \equiv (2, -2)$, $C \equiv (6, 6)$. (Ak taká kružnica existuje.)
d) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (3, 0)$, $C \equiv (3, 4)$. (Má trojuholník ABC nejakú špeciálnu vlastnosť, ktorá môže zjednodušiť riešenie tejto úlohy?)
e) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (1, 1)$, $B \equiv (3, 3)$, $C \equiv (1, 5)$.
f) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (1, 1)$, $B \equiv (3, 3)$, $C \equiv (3, 5)$.
g) Dotyčnica k elipse $5x^2 + 9y^2 = 45$ prechádzajúca bodom $(0, -3)$.
h) Dotyčnica k hyperbole $2x^2 - 3y^2 + 8x^2 + 6y - 25 = 0$ prechádzajúca bodom $(5, 10)$.
i) Dotyčnica k parabole $6y = x^2$ prechádzajúca bodom $(6, 6)$.

Literatúra

[BPC] L. A. Beklemisheva, A. Yu. Petrovich, and I. A. Chubarov. *Sbornik zadach po analiticheskoj geometrii i lineinoi algere.* Fizmatlit, 2004.

[ŠBP] Jaroslav Šedivý, Leo Boček, and Jozef Polák. *Analytická geometria kvadratických útvarov, matematika pre 3. ročník gymnázií.* SPN, Bratislava, 1994.