Hľadanie pevných bodov

7. mája 2018

$f(x) = \cos x$

$x_0 = x,\ x_{n+1} = \cos x_n$

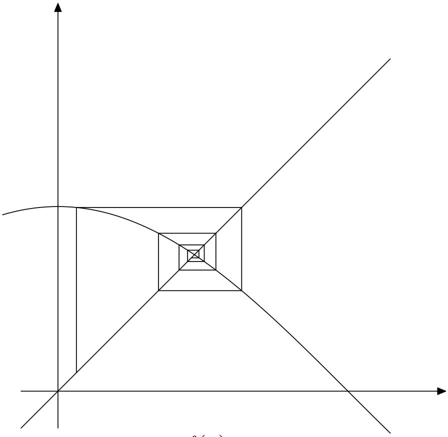


Figure: Iterácie funkcie $f(x) = \cos x$

Pevný bod

Definícia

Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ a nech $f\colon A \to \mathbb{R}$ je zobrazenie. Bod $x \in A$ sa nazýva *pevný bod zobrazenia* f, ak platí

$$f(x) = x.$$

Iterácie funkcie f

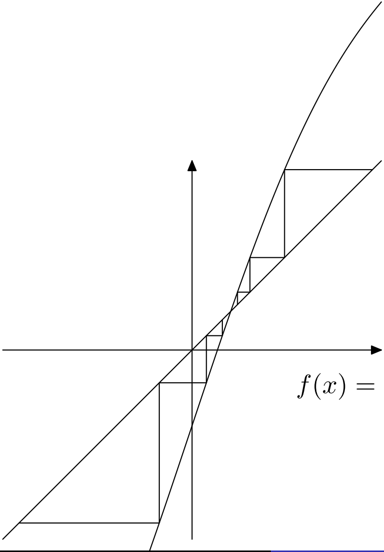
$$x_0 = x$$
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Ak je funkcia f spojitá a postupnosť (x_n) *konverguje*, tak limita bude pevný bod funkcie f.
Pre $c = \lim_{n\to\infty} x_n$ dostávame

$$f(c) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = c.$$

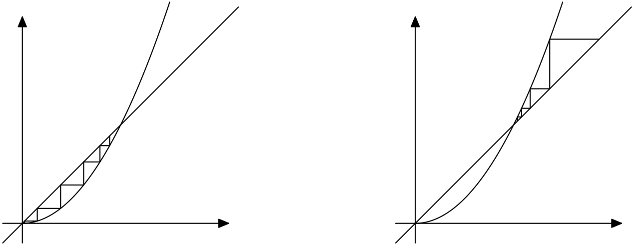
Táto postupnosť však vo všeobecnosti nemusí konvergovať.

Príklad keď iterácie nekonvergujú

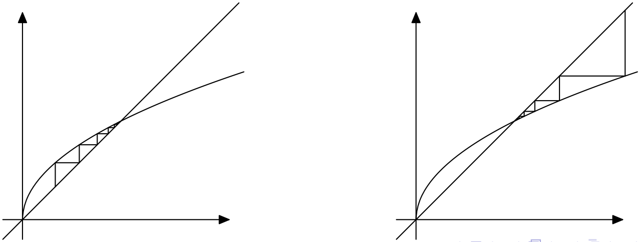


$$f(x) = 2x - 1 + \sin x$$

Konvergencia môže závisieť od voľby počiatočného bodu



$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = \sqrt{x}$$

Banachova veta o pevnom bode

Veta (Banachova veta o pevnom bode)

Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia a existuje konštanta $\alpha < 1$ taká, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|.$$

Potom funkcia f má práve jeden pevný bod c.
Postupnosť iterácií

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

konverguje k tomuto bodu c pre ľubovoľnú voľbu x_0.

Babylonská metóda

$$f(x) = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

x	$y = \left(x + \frac{2}{x}\right)/2$		y^2
1	$\frac{3}{2}$	$1{\cdot}5$	$\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$1{\cdot}416{,}7$	$\frac{289}{144} = 2 + \frac{1}{144}$
$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	$1{\cdot}414{,}2$	$\frac{332929}{166464} = 2 + \frac{1}{166464}$

$$\sqrt{2} = 1{\cdot}414{,}213{,}562$$
$$577/408 = 1{\cdot}414{,}215{,}686$$

Babylonská metóda

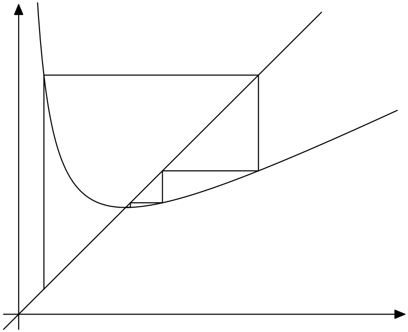


Figure: Pre funkciu $f(x) = \frac{x+\frac{2}{x}}{2}$ iterácie kovergujú k $\sqrt{2}$

Dôkaz konvergencie

Tvrdenie

Nech

$$f(x) = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}.$$

Potom postupnosť určená rekurzívnym predpisom

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

konverguje k $\sqrt{a}$ *pre ľubovoľnú voľbu* $x_0 > 0$.

Dôkaz konvergencie

$$\frac{x + \frac{a}{x}}{2} - \sqrt{a} = \frac{x^2 - 2\sqrt{a}x + a}{2x} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}$$

$$\left|\frac{x + \frac{a}{x}}{2} - \sqrt{a}\right| = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{\sqrt{a}}{x}\right| \cdot |x - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}|x - \sqrt{a}|.$$