

Domáca úloha č. 1

Zverejnená 19.2.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 5.3.2018.
Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

1. Rozhodnite, či ide o tautológiu.

(a) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

(b) $[p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r]$

(c) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

(d) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

(e) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$

2. Zistite, či platí daná množinová identita. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

(a) $A \cap (A \cup B) = A$

(b) $A \cup (A \cap B) = A$

(c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

(d) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

(e) $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$

a: TA, AE, AF, LĚ, ,

b: LK, AM, MO, PV, ,

c: SS, MS, KŠ, JŽ,

d: MJ, JK, JŠ, ,

e: BP, MP, AT, ,

Domáca úloha č. 2

Zverejnená 19.2.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 5.3.2018.

Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

Poznámka k tejto d.ú.: Ako som spomínal aj na prednáške, tak v budúcnosti budeme používať podobné tvrdenia týkajúce sa výrokov s kvantifikátormi bez toho, že by ich bolo treba detailne zdôvodniť. Tieto prvé príklady sú však na to, aby ste si trochu precvičili to, či viete rozoznať, ktoré tvrdenia platia a ktoré nie – preto v tomto prípade by som chcel, aby ste skúsili napísať aj nejaké zdôvodnenie.

1. Nech p je výrok a $Q(x)$ je výroková funkcia. Zistite, či platí uvedená ekvivalencia. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

(a) $p \wedge (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(p \wedge Q(x))$

(b) $p \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(p \vee Q(x))$

(c) $p \wedge (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(p \wedge Q(x))$

(d) $p \vee (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(p \vee Q(x))$

2. Zistite, či platí uvedená implikácia. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

(a) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)]$

(b) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)]$

(c) $(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)]$

(d) $[(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)] \Rightarrow (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$

a: TA, AM, MO, SS, JŠ, ,

b: AF, MJ, MS, JK, PV, ,

c: BP, KŠ, AT, LŤ, ,

d: AE, LK, MP, JŽ, , ,

Domáca úloha č. 3

Zverejnená 26.2.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 12.3.2018.
Táto d.ú. je za 6 bodov.

1. Zistite, či platí uvedená rovnosť pre ľubovoľnú množinu A a ľubovoľné systémy množín $\{A_i; i \in I\}$, $\{B_i; i \in I\}$. (V častiach, kde sa vyskytuje prienik, navyše predpokladáme $I \neq \emptyset$, aby prienik bol definovaný. Dokazujte tieto tvrdenia priamo z definície – bez použitia akýchkoľvek pomocných tvrdení o množinách z textu k prednáške alebo z cvičení.)

(a) $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$

(b) $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$

(c) $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i)$

(d) $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap B_i)$

a: TA, AM, MO, SS, JŠ, ,

b: AF, MJ, MS, JK, PV, ,

c: BP, KŠ, AT, LĽ, ,

d: AE, LK, MP, JŽ, , ,

Domáca úloha č. 4

Zverejnená 26.2.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 12.3.2018.
Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

1. Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad:

- a) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$;
- b) $(A \times B) \cup (C \times D) \supseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$;
- c) $(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$;
- d) $(A \times B) \cap (C \times D) \supseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$;

2. Dokážte platnosť daného tvrdenia pre ľubovoľné množiny A, B, C , alebo nájdite kontrapríklad:

- a) $A \subseteq B \cap C$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a $A \subseteq C$;
- b) $A \subseteq B \cup C$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ alebo $A \subseteq C$;
- c) $A \cup B \subseteq C$ práve vtedy, keď $A \subseteq C$ a $B \subseteq C$;
- d) $A \cap B \subseteq C$ práve vtedy, keď $A \subseteq C$ alebo $B \subseteq C$.

- a: TA, AM, MO, SS, JŠ, ,
- b: AF, MJ, MS, JK, PV, ,
- c: BP, KŠ, AT, LĽ, ,
- d: AE, LK, MP, JŽ, , ,

Domáca úloha č. 5

Zverejnená 6.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 19.3.2017.

Táto d.ú. je za 6 bodov.

Pripomínam, že označenie $f^{-1}(B)$ označuje *vzor* množiny B v zobrazení f (a nie obraz množiny B v inverznom zobrazení f^{-1}).

1. Nech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$, $E \subseteq Z$, $A_i \subseteq X$ a $B_i \subseteq Y$ pre každé $i \in I$. Dokážte, že platí:
 - a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;
 - b) $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$ a ukážte na príklade, že nemusí platiť rovnosť;
 - c) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;
 - d) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
 - e) $f[A] \setminus f[B] = f[A \setminus B]$ za predpokladu, že f je injekcia.

a: TA, AM, BP, LĤ, ,

b: AE, MO, SS, PV, ,

c: AF, MS, KŠ, JŽ, ,

d: JK, MP, AT, , ,

e: MJ, LK, JŠ, , ,

Domáca úloha č. 6

Zverejnená 6.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 19.3.2017.

Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

Za predpokladu, že A, B, A_i, B_i (pre každé $i \in \mathbb{N}$) sú ľubovoľné množiny, dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia.

Poznámka 1: Tvrdenia v prvej úlohe by sa mohli dať dokázať matematickou indukciou. Skúste sa zamyslieť nad tým, či sa dá matematická indukcia použiť aj v druhej úlohe, alebo to treba dokazovať nejakým iným spôsobom.

Poznámka 2: Aj ste schopní dokázať tvrdenia v druhej časti a potom vysvetliť, že z nich vyplývajú tvrdenia v prvej časti, tak to je samozrejme úplne legitímne riešenie. (A ak budú vaše argumenty správne, tak znamená plný počet bodov.) Stručne: Môžete to riešiť v inom poradí, ako je to zadané – ak vám to nejako pomôže.

1. (a) $B \cup \left(\bigcap_{i=0}^n A_i \right) = \bigcap_{i=0}^n (B \cup A_i)$
(b) Ak pre každé $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ platí $A_i \subseteq B_i$, tak aj $\bigcup_{i=0}^n A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^n B_i$.
(c) Ak pre každé $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ platí $A_i \subseteq B_i$, tak aj $\bigcap_{i=0}^n A_i \subseteq \bigcap_{i=0}^n B_i$.
(d) Ak pre niektoré $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ platí $A_i \cap B = \emptyset$, tak platí aj $\left(\bigcap_{i=0}^n A_i \right) \cap B = \emptyset$.
2. (a) $B \cup \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=0}^{\infty} (B \cup A_i)$
(b) Ak pre každé $i \in \mathbb{N}$ platí $A_i \subseteq B_i$, tak aj $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$.
(c) Ak pre každé $i \in \mathbb{N}$ platí $A_i \subseteq B_i$, tak aj $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$.
(d) Ak pre nejaké $i \in \mathbb{N}$ platí $A_i \cap B = \emptyset$, tak platí aj $\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \right) \cap B = \emptyset$.

a: TA, AM, MO, SS, JŠ, ,

b: AF, MJ, MS, JK, PV, ,

c: BP, KŠ, AT, LĽ, ,

d: AE, LK, MP, JŽ, , ,

Domáca úloha č. 7

Zverejnená 12.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 26.3.2018.

Táto domáca úloha je za 6 bodov.

Pripomínam, že označenie $f^{-1}[B]$ označuje *vzor* množiny B v zobrazení f (a nie obraz množiny B v inverznom zobrazení f^{-1}).

1. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Dokážte:

- a) f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné $A \subseteq X$ platí $A = f^{-1}[f[A]]$;
- b) f je surjekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné $C \subseteq Y$ platí $f[f^{-1}[C]] = C$;
- c) f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné $A, B \subseteq X$ platí $A \subseteq B \Leftrightarrow f[A] \subseteq f[B]$;
- d) f je surjekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné $C, D \subseteq Y$ platí $C \subseteq D \Leftrightarrow f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D]$.

a: TA, AM, MO, SS, JŠ, ,

b: AF, MJ, MS, JK, PV, ,

c: BP, KŠ, AT, LĽ, ,

d: AE, LK, MP, JŽ, , ,

Domáca úloha č. 8

Zverejnená 12.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 26.3.2018.
Táto domáca úloha je za 6 bodov.

1. Zistite, či dané tvrdenie platí (zdôvodnite ho, alebo vyvráťte resp. nájdite kontrapríklad):
 - a) Ak A, B sú ľubovoľné množiny, tak platí

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

b) $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$

c) Ak $f: X \rightarrow Y$ je ľubovoľné zobrazenie, $A, B \subseteq X$ a platí $|A| \leq |B|$, tak aj $|f[A]| \leq |f[B]|$.

d) Ak $f: X \rightarrow Y$ je injekcia, $A, B \subseteq X$ a platí $|A| \leq |B|$, tak aj $|f[A]| \leq |f[B]|$.

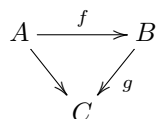
- a: TA, AM, MO, SS, JŠ, ,
b: AF, MJ, MS, JK, PV, ,
c: BP, KŠ, AT, LĽ, ,
d: AE, LK, MP, JŽ, , ,

Domáca úloha č. 9

Zverejnená 20.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 9.4.2018. (Je dlhší interval na odovzdávanie - dvojtýždňový interval by znamenal odovzdávanie 2. apríla, kedy je sviatok.)

Táto domáca úloha je za 6 bodov.

Nech A, B, C sú množiny, pričom množina C je neprázdna, a $f: A \rightarrow B$ je zobrazenie.



Potom môžeme definovať zobrazenie $\varphi: C^B \rightarrow C^A$ predpisom

$$\varphi(g) = g \circ f.$$

1. Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad:
 - a) Ak f je surjektívne, tak φ je injektívne.
 - b) Ak f je surjektívne, tak φ je surjektívne.
 - c) Ak f je bijektívne, tak φ je bijektívne.
 - d) Ak f je injektívne, tak φ je injektívne.

- a: TA, AM, MO, SS, JŠ, ,
b: AF, MJ, MS, JK, PV, ,
c: BP, KŠ, AT, LĽ, ,
d: AE, LK, MP, JŽ, , ,

Domáca úloha č. 10

Zverejnená 26.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr 9.4.2018.

Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

1. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel \aleph_0 , \mathfrak{c} , $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
a) \mathfrak{c}^{\aleph_0} ; b) $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$; c) $\aleph_0^{\mathfrak{c}}$; d) $\mathfrak{c} \cdot \aleph_0$
2. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel \aleph_0 , \mathfrak{c} , $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
a) $(2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0}$; b) $\mathfrak{c}^{2^{\mathfrak{c}}}$; c) $\aleph_0 \cdot 2^{\mathfrak{c}}$; d) $(2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}}$;

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Ak je použitý zápis a^{b^c} , myslí sa tým $a^{(b^c)}$ a nie $(a^b)^c$. (Čo je asi vcelku prirodzené, lebo $(a^b)^c$ by sme mohli prepísať ako a^{bc} ; ale pre istotu som to zdôraznil.)

a: TA, AM, MO, SS, JŠ, ,

b: AF, MJ, MS, JK, PV, ,

c: BP, KŠ, AT, LTĽ, ,

d: AE, LK, MP, JŽ, , ,

Domáca úloha č. 11

Zverejnená 26.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr 9.4.2018.

Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

1. Nájdite kardinalitu danej množiny:
a) $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$; c) $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$; d) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;
2. Nájdite kardinalitu danej množiny:
a) $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$; b) $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$; c) $\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$; d) $\mathbb{C}^{\mathbb{Q}}$;

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$. Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Výsledok by mal byť upravený na niektoré z kardinálnych čísel \aleph_0 , \mathfrak{c} , $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$.

- a: TA, AM, MO, SS, JŠ, ,
b: AF, MJ, MS, JK, PV, ,
c: BP, KŠ, AT, LĽ, ,
d: AE, LK, MP, JŽ, , ,

Domáca úloha č. 12

Zverejnená 26.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr 16.4.2018.

Táto d.ú. je za 6 bodov.

Zistite, či uvedené tvrdenie platí pre ľubovoľné nekonečné kardinálne čísla a, b, c . Ak platí, tak ho dokážte. Ak nie uveďte kontrapríklad (a zdôvodnite, že je to skutočne kontrapríklad).

a) $a^b = a^c \Rightarrow b = c$

b) $b^a = c^a \Rightarrow b = c$

c) $a^b \leq a^c \Rightarrow b \leq c$

d) $b^a \leq c^a \Rightarrow b \leq c$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.)

a: TA, AE, MP, MS, JŽ, , ,

b: AF, LK, MO, KŠ, , ,

c: JK, MJ, SS, LĽ, PV, ,

d: BP, JŠ, AT, AM, , , ,

Domáca úloha č. 13

Zverejnená 26.3.2018 - odovzdáva sa najneskôr 16.4.2018.

Táto d.ú. je za 6 bodov.

Dané množiny usporiadajte podľa kardinality. Svoje tvrdenia zdôvodnite! (T.j. očakáva sa napríklad odpoveď v tvare napríklad $|A| < |C| = |D| < |B|$ a zdôvodnenie všetkých uvedených nerovností a rovností.)

- (a) $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C = \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, $D =$ množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (b) $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C = \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, $D =$ množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (c) $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $C = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $D =$ množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovností $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$.

V prípade množiny D budete potrebovať ešte vetu, ku ktorej som sa na prednáške nedostal. (Ale môžete si ju pozrieť v poznámkach k prednáške.)

Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Výsledok by mal byť upravený na niektoré z kardinálnych čísel \aleph_0 , \mathfrak{c} , $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$.

a: TA, JK, MJ, BP, AT, JŽ, , , ,

b: AF, AE, MO, MS, JŠ, PV, , , ,

c: AM, LK, SS, MP, KŠ, LĽ, , , ,

Domáca úloha č. 14

Zverejnená 10.4.2018 - odovzdáva sa najneskôr 23.4.2018.

Táto d.ú. je za 6 bodov.

Postupnosť (a_n) čísel sa volá *takmer stacionárna*, ak

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \geq m)a_n = a_m.$$

Inými slovami, od určitého čísla m sú už všetky členy tejto postupnosti rovnaké.

Dokážte, že:

- množina všetkých takmer stacionárnych postupností čísel $0, 1$ má kardinalitu \aleph_0 ;
- množina všetkých takmer stacionárnych postupností prirodzených čísel má kardinalitu \aleph_0 ;
- množina všetkých takmer stacionárnych postupností reálnych čísel má kardinalitu \mathfrak{c} .

a: TA, AE, JK, SS, LŤ, PV, , , ,

b: AF, MJ, LK, BP, KŠ, JŽ, , , , ,

c: AM, MO, MP, MS, JŠ, AT, , ,