Vektorové priestory

$(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad R ak $+\colon V \times V \to V$, $\cdot\colon R \times V \to V$ a platí

- $(V, +)$ je komutatívna grupa;
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ pre ľubovoľné $\alpha \in R$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$;
- $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $1\vec{x} = \vec{x}$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in V$.

1. Ukážte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$.
2. Koľko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha}+\vec{\alpha}+\vec{\alpha}$?
3. Zistite, či $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$ pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $r \cdot (a, b) = (ra, 2rb)$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.
4. Zistite, či $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, ak definujeme $x \oplus y = xy$, $c \odot x = x^c$ pre $x, y \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$.

Podpriestory

Ak V je vektorový priestor nad poľom R a M je *neprázdna* podmnožina R, tak tieto podmienky sú ekvivalentné:

- M je podpriestor priestoru V.
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha \in R$ platí $\vec{x} + \vec{y} \in M$, $\alpha\vec{x} \in M$.
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha, \beta \in R$ platí $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in M$.

1. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$?
   a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
   b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
   c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
   d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
   e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
   f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
   g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
   h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
   i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
   j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
2. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?
   a) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$
   b) nezáporné funkcie
   c) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$
   d) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) f(x) = f(1 - x)$
   e) ohraničené funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   f) spojité funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   h) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
   i*) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná alebo nekonečná $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
3. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Ukážte, že $S \cup T$ je podpriestor priestoru Vpráve vtedy, keď $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$.