Vzdialenosť afinných podpriestorov

1. [P, 1376] Ukážte, že vzdialenosť medzi dvoma afinnými podpriestormi $P_1 = A_1 + V_1$ a $P_2 = A_2 + V_2$ sa rovná dĺžke ortogonálnej projekcie vektora $\overrightarrow{A_1A_2}$ do priestoru $V^{\perp}$, kde $V = V_1 + V_2$.
2. Ukážte, že vzdialenosť medzi dvoma afinnými priestormi $P_1 = A_1 + V_1$ a $P_2 = A_2 + V_2$ sa rovná vzdialenosti bodu P_1 od afinného podpriestoru $P_2 + V$, kde $V = V_1 + V_2$.
3. [BPC, 34.21] Nájdite vzdialenosť bodu A od priamky l:
   a) $A = (0, 3, 2, -5)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 1 + t, x_2 = -t, x_3 = 2 + 2t, x_4 = -2 + 2t\}$;
   b) $A = (2, -2, 1, 5)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 3 + t, x_2 = -1 + t, x_3 = 2 + t, x_4 = -t\}$;
   c) $A = (3, 3, 1, 0, 0)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5; x_1 = 2+3t, x_2 = 1+2t, x_3 = -t, x_4 = 1 + t, x_5 = -1 - t\}$;
   d) $A = (1, -1, -1, 1)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1+x_2+2x_3+1 = 0, 3x_2+2x_3-x_4-1 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 0\}$.
   [Výsledky: a) 3; b) $2\sqrt{3}$; c) 4; d) $\sqrt{6}$.]
4. [BPC, 34.23] Nájdite vzdialenosť medzi priamkami l_1 a l_2:
   a) l_1: $x_1 = 1 + t$, $x_2 = -1$, $x_3 = -t$, $x_4 = -2 + t$; l_2: $x_1 = 4 + t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = t$
   b) $l_1 = \{(2 + t, -1 - 2t, 2 + 2t, 1 - t); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(3 - t, 1 + 2t, -1 - 2t, 2 + t); t \in \mathbb{R}\}$;
   c) $l_1 = \{(3 + t, 2, t, 3 + t, -t); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(1 + 2t, 2t, 1 - t, t, 2); t \in \mathbb{R}\}$;
   d) $l_1 = \{(1 + t, 2t, 1 - t, -1 + t, t); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(3 + t, -2t, -1 - t, 1 + t, 2 + t); t \in \mathbb{R}\}$;
   e) $l_1 = \{(1 - 2t, 0, t, 1 + t, 2); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(-1 + t, -1 + t, 0, 1, -2 - t); t \in \mathbb{R}\}$;
   [Výsledky: a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{5}$; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) 4]
5. Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = (0, 2, 1, 0)$ od roviny $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = 1 - v \\ x_3 = 1 - u \\ x_4 = v \end{cases}$ a jeho kolmý priemet. [Výsledok: $A^{\perp} = (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$]
6. Nájdite priamku q, ktorá je rovnobežná s priamkou $p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 3x_1 + 4x_2 - 1 = 0\}$, a platí pre ňu $\varrho(S, q) = 1$, kde $S = (2, 1)$.
7. Nech $p = \{(x_1, x_2); x_1 = -1 + t, x_2 = 3 - t, t \in \mathbb{R}\}$, $\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 7x_1 + x_2 = 0\}$, $\beta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 - x_2 + 8 = 0\}$. Nájdite bod $P \in p$ taký, že $\varrho(P, \alpha) = \varrho(P, \beta)$. [Výsledok: $P = (-3, 5)$, $P = (-1, 3)$]
8. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = 3u + v \\ x_2 = 1 + 2u + v \\ x_3 = -4u - 2v \\ x_4 = 2 + u + v \end{cases}$ $\quad \beta \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad \varrho(\alpha, \beta) =$? [Výsledok: $\frac{\sqrt{10}}{2}$]
9. Zistite vzdialenosť afinných podpriestorov $p = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = t, x_2 = 1 + t, x_3 = t, x_4 = -t, x_5 = t, t \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = v, x_2 = u, x_3 = -u, x_4 = v, x_5 = -u, u, v \in \mathbb{R}\}$. [Výsledok: $\frac{\sqrt{14}}{7}$]
10. [S, 1375] Nájsť vzdialenosť medzi priamkou l a rovinou P ak:
    a) $l = (9, -2, -1, -1) + [(2, -2, -1, -1)]$; $P = (2, 1, 3, -3) + [(3, -2, 2, 0), (-5, 2, 0, 2)]$;
    b) $l = (2, 4, 0, 14) + [(0, 1, -2, 5)]$; $P = (4, 1, -2, 5) + [(-1, 1, -1, 5), (1, 1, -3, 3)]$.
    [Výsledky: a) $\frac{27}{5}$; b) $\sqrt{6}$]
11. [S, 1376] Nájdite vzdialenosť medzi priamkou l a rovinou P, ak:
    a) $l = (9, -2, -1, -1) + [(2, -2, -1, -1)]$; $P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; 2x + 4y + z + t = 8, 2x + 7y + 4z - 2t = 29\}$;

b) $l = (2,-3,1,-4) + [(-1,2,1,1)]$; $P = \{(x,y,z,y) \in \mathbb{R}^4; x+y+z+12t = 19, 5x + 2y - 7z - 6t = -7\}$;
c) $l = (2,4,0,14) + [(0,1,-2,5)]$; $P = \{(x,y,z,y) \in \mathbb{R}^4; 2x - 2y + z + t = 9, 4x + 2y + 3z + t = 17\}$;
Výsledky: a) 27/5, b) $\sqrt{13}$, c) $\sqrt{6}$

12. [P, 1377] Nájdite vzdialenosť dvoch rovín v $\mathbb{R}^4$ ak jedna z nich je určená bodom $X = (4,5,3,2)$ a vektormi $\vec{a} = (1,2,2,2)$, $\vec{b} = (2,-2,1,2)$, druhá je určená bodom $Y = (1,-2,1,-3)$ a vektormi $\vec{c} = (2,0,2,1)$, $\vec{d} = (1,-2,0,-1)$.

Uhly, kolmosť

1. Nech $A = (7,-4,-1,2)$ a $\alpha \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ Nájdite $A^\perp$. [Výsledok: $A^\perp = (5,-5,-2,-1)$]
2. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0 \end{cases}$ $p \equiv \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 + 2t \end{cases}$
   Nájdite priamku q takú, že $(0,0,0,0) \in q$, $q \perp p$ a $q \perp \alpha$. [Výsledok: $q = \{(11u, 3u, -4u, 4u); u \in \mathbb{R}\}$]
3. Nech $P = (1,-1,2,1)$
   $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2 = 0 \end{cases}$ $\beta \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 + u + v \\ x_3 = -u \\ x_4 = 1 - v \end{cases}$
   Nájdite priamku p takú, že $P \in p$, $p \perp \alpha$ a p pretína β.
4. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 + v \\ x_3 = v \\ x_4 = v \\ x_5 = u \end{cases}$ $\beta \equiv \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - 1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ Nájdite rovinu γ takú, že $\gamma \supseteq \alpha$ a $\gamma \perp \beta$. (Akú dimenziu môže mať afinný podpriestor γ, ak má spĺňať tieto 2 podmienky?)

Literatúra

[BPC] L. A. Beklemisheva, A. Yu. Petrovich, and I. A. Chubarov. *Sbornik zadach po analiticheskoj geometrii i lineinoi algebre.* Fizmatlit, 2004.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.

[S] Yu. M. Smirnov. *Sbornik zadach po analiticheskoi geometrii i linejnoj algebre.* Golos, Moskva, 2005.