

1 Podobnosť matíc

Matice A a B sú *podobné* \Leftrightarrow existuje regulárna matica P taká, že $PAP^{-1} = B$. Táto podmienka je ekvivalentná s tým, že A aj B predstavujú maticu toho istého zobrazenia v dvoch rôznych bázach. (Konkrétne, ak A je matica nejakého zobrazenia pri štandardnej báze, tak $B = PAP^{-1}$ je matica toho istého zobrazenia pri báze určenej riadkami matice P .)

Ak $c\vec{v} = \vec{v}A$, kde $\vec{v} \neq \vec{0}$, tak \vec{v} je *vlastný vektor* matice A a c je *vlastná hodnota* (*vlastné číslo*) matice A .

Vlastné hodnoty sú presne korene *charakteristického polynómu* $\chi_A(t) = \det(tI - A)$ matice A .

Podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm (a teda aj rovnakú stopu, determinant, vlastné čísla).

Matica typu $n \times n$ je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď jej vlastné vektory tvoria bázu priestoru F^n . Matice P a D také, že $PAP^{-1} = D$, kde P je regulárna a D je diagonálna, dostaneme tak, že D má na diagonále vlastné čísla a P má ako riadky (v rovnakom poradí) vlastné vektory.

Jordanov normálny tvar. Každá matica nad \mathbb{C} je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.1. Vypočítajte charakteristický polynóm a vlastné hodnoty daných matíc. Zistite, či dané matice sú podobné:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;

b) [P, 1067] $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$

1.2. [P, 1064] Zistite, či matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$ sú podobné.

1.3. Nájdite diagonálnu maticu podobnú s danou maticou:

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ nad poľom \mathbb{Q} ;

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Vlastné čísla sú: $-5, 1$. b) Vlastné čísla sú $\pm\sqrt{2}$.

1.4. Musia byť matice, ktoré majú rovnaké vlastné čísla, podobné?

1.5. Dokážte, že ak A a B sú podobné, tak sú podobné aj matice $A - cI$ a $B - cI$ (pre ľubovoľné $c \in F$).

1.6. [P, 1051] Nech φ je ľubovoľná permutácia množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Dokážte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} a_{\varphi(1)\varphi(1)} & a_{\varphi(1)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(1)\varphi(n)} \\ a_{\varphi(2)\varphi(1)} & a_{\varphi(2)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(2)\varphi(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\varphi(n)\varphi(1)} & a_{\varphi(n)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(n)\varphi(n)} \end{pmatrix}$$

sú podobné.

- 1.7. Zistite pre aké hodnoty parametrov $a, b, c \in \mathbb{C}$ je daná matica (nad \mathbb{C}) podobná s diagonálnou maticou.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix};$$

2 Vlastné čísla, vlastné vektory

- 2.1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory nad polom \mathbb{C} .

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \text{ b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ d) } \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}, \text{ e) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla sú: a) $-2, 7$; b) $3 \pm 2i$; c) $-3, 2$; d) $-2, 3$; e) $2, 2 \pm \sqrt{2}$

- 2.2. Ukážte, že matica A je singularná práve vtedy, keď 0 je jej vlastné číslo.
 2.3. Ukážte, že ak A je regulárna, tak matice A a A^{-1} majú rovnaké vlastné vektory. Čo viete povedať o vlastných hodnotách?
 2.4. Nech A je matica typu $n \times k$ a B je matica typu $k \times n$. Ukážte, že: a) Ak *nenulové* vlastné hodnoty matíc AB a BA sú rovnaké.
 b) Platilo by tvrdenie z predošlej časti po vynechaní slova *nenulové*?
 c) Ak $k = n$ matice AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.
 2.5. [K, 4005] Ukážte, že ak každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je vlastným vektorom matice A , tak $A = cI$ pre nejaké $c \in \mathbb{R}$.
 2.6. Aké matice sú podobné s maticou I ? Aké matice sú podobné s nulovou maticou?
 2.7. Nech A je matica $n \times n$ nad polom \mathbb{C} taká, že pre každú regulárnu maticu $n \times n$ platí $PAP^{-1} = A$. Ukážte, že potom $A = cI$ pre nejaké $c \in \mathbb{C}$. (Inak povedané, týmto sme charakterizujeme také matice, že A je podobná sama so sebou a už so žiadnou inou maticou. T.j. trieda ekvivalencie tejto matice pri relácii „podobnosť matíc“ je jednoprvková.)
 2.8. Nech A je štvorcová matica nad polom \mathbb{C} taká, že 1 nie je jej vlastná hodnota. Ukážte, že ak $A^n = I$, tak $A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I = 0$.
 2.9. Nájdite maticu 3×3 , ktorej vlastné čísla sú $1, 2, 3$ a táto matica má aspoň sedem nenulových prvkov.

3 Charakteristický a minimálny polynóm

- 3.1. Ukážte, že podobné matice majú rovnaký charakteristický aj minimálny polynóm. Dá sa na základe toho usúdiť, že majú aj rovnaký determinant a stopu?
 3.2. Ak viete, že charakteristický polynóm matice A je $\chi_A(x) = x^2 + 4x - 5$, ako vyzerá charakteristický polynóm matice A^2 .
 3.3. Nech A je matica typu $n \times 2$ a B je matica typu $2 \times n$. Dokážte, že ak $(AB)^2 = 0$, tak aj $(BA)^2 = 0$. (Hint: Čo viete povedať o vlastných hodnotách matice BA , prípadne o jej minimálnom či charakteristickom polynóme.)

Literatúra

- [K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry*. OPA, Amsterdam, 1996.
 [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.