

Skalárny súčin

Skalárny súčin definujeme iba pre vektorové priestory nad \mathbb{R} . Je to zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ také, že:

- (i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle$,
- (ii) $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$,
- (iii) $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$,
- (iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$.

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$$

- (a) $|\vec{\alpha}| \geq 0$
- (b) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
- (c) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$
- (d) $|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (Schwarzova nerovnosť)
- (e) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (trojuholníková nerovnosť)

Štandardný skalárny súčin v \mathbb{R}^n :

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Kolmé (ortogonálne) vektory: $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

Každý konečnorozmerný euklidovský priestor má ortonormálnu bázu (t.j. bázu pozostávajúcu z vektorov, ktoré majú veľkosť 1 a sú na seba kolmé.)

Ortogonalný doplnok:

$$M^\perp = \{\vec{x} \in V; (\forall \vec{m} \in M) \vec{x} \perp \vec{m}\}$$

Ak S je podpriestor **konečnorozmerného** priestoru V , tak:

$$\begin{aligned} S \oplus S^\perp &= V \\ \dim(S) + \dim(S^\perp) &= \dim(V) \\ (S^\perp)^\perp &= S \end{aligned}$$

Rovnosť $S \oplus S^\perp$ znamená, že každý vektor sa dá jednoznačne vyjadriť ako súčet vektora z S a vektora z S^\perp :

$$\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}.$$

Priradenie

$$P: \vec{x} \mapsto \vec{x}_S$$

je lineárne zobrazenie, ktoré sa nazýva ortogonálna projekcia do podpriestoru S . Ak pracujeme so štandardným skalárnym súčinom, tak matica zobrazenia P je symetrická.

Ak $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ tvoria ortonormálnu bázu podpriestoru S , tak

$$P(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{x}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 + \dots + \langle \vec{x}, \vec{u}_k \rangle \vec{u}_k.$$

Pre štandardný skalárny súčin dostaneme $P(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k \vec{x} \vec{u}_i^T \vec{u}_i = \vec{x} \sum_{i=1}^k \vec{u}_i^T \vec{u}_i$, čiže matice projekcie je

$$\vec{u}_1^T \vec{u}_1 + \vec{u}_2^T \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_k^T \vec{u}_k.$$