Domáca úloha č. 1

Zverejnená 18.2.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 4.3.2019.
Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

1. Rozhodnite, či ide o tautológiu.
   (a) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
   (b) $[p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r]$
   (c) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
   (d) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
   (e) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$

2. Zistite, či platí daná množinová identita. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
   (a) $A \cap (A \cup B) = A$
   (b) $A \cup (A \cap B) = A$
   (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
   (d) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
   (e) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$

a: KB, KD, SG, LV, ,
b: IH, AJ, MK, JK, ,
c: VO, EP, PS, ,
d: DH, SH, JŠ, ,
e: RL, MM, VT, ,

Domáca úloha č. 2

Zverejnená 18.2.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 4.3.2019.
Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

Poznámka k tejto d.ú.: Ako som spomínal aj na prednáške, tak v budúcnosti budeme používať podobné tvrdenia týkajúce sa výrokov s kvantifikátormi bez toho, že by ich bolo treba detailne zdôvodniť. Tieto prvé príklady sú však na to, aby ste si trochu precvičili to, či viete rozoznať, ktoré tvrdenia platia a ktoré nie – preto v tomto prípade by som chcel, aby ste skúsili napísať aj nejaké zdôvodnenie.

1. Nech p je výrok a $Q(x)$ je výroková funkcia. Zistite, či platí uvedená ekvivalencia. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
   (a) $p \land (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(p \land Q(x))$
   (b) $p \lor (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(p \lor Q(x))$
   (c) $p \land (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(p \land Q(x))$
   (d) $p \lor (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(p \lor Q(x))$

2. Zistite, či platí uvedená implikácia. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
   (a) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)]$
   (b) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)]$
   (c) $(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)]$
   (d) $[(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)] \Rightarrow (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$

a: KB, AJ, MK, VO, JŠ, ,
b: SG, DH, EP, SH, JK, ,
c: RL, PS, VT, LV, ,
d: KD, IH, MM, , , ,

Domáca úloha č. 3

Zverejnená 25.2.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 11.3.2018.
Táto d.ú. je za 6 bodov.

1. Zistite, či platí uvedená rovnosť pre ľubovoľnú množinu A a ľubovoľné systémy množín $\{A_i; i \in I\}$, $\{B_i; i \in I\}$. (V častiach, kde sa vyskytuje prienik, navyše predpokladáme $I \neq \emptyset$, aby prienik bol definovaný. Dokazujte tieto tvrdenia priamo z definície – bez použití akýchkoľvek pomocných tvrdení o množinách z textu k prednáške alebo z cvičení.)
   (a) $A \setminus \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A \setminus B_i)$
   (b) $A \setminus \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \setminus B_i)$
   (c) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cup (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i)$
   (d) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \cap (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i)$

a: KB, AJ, MK, VO, JŠ, ,
b: SG, DH, EP, SH, JK, ,
c: RL, PS, VT, LV, ,
d: KD, IH, MM, , , ,

Domáca úloha č. 4

Zverejnená 25.2.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 11.3.2018.
Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

1. Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad:
   a) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$;
   b) $(A \times B) \cup (C \times D) \supseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$;
   c) $(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$;
   d) $(A \times B) \cap (C \times D) \supseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$;

2. Dokážte platnosť daného tvrdenia pre ľubovoľné množiny A, B, C, alebo nájdite kontrapríklad:
   a) $A \subseteq B \cap C$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a $A \subseteq C$;
   b) $A \subseteq B \cup C$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ alebo $A \subseteq C$;
   c) $A \cup B \subseteq C$ práve vtedy, keď $A \subseteq C$ a $B \subseteq C$;
   d) $A \cap B \subseteq C$ práve vtedy, keď $A \subseteq C$ alebo $B \subseteq C$.

a: KB, AJ, MK, VO, JŠ, ,
b: SG, DH, EP, SH, JK, ,
c: RL, PS, VT, LV, ,
d: KD, IH, MM, , , ,

Domáca úloha č. 5

Zverejnená 5.3.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 18.3.2019.
Táto d.ú. je za 6 bodov.

Pripomínam, že označenie $f^{-1}(B)$ označuje *vzor* množiny B v zobrazení f (a nie obraz množiny B v inverznom zobrazení f^{-1}).

1. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ sú zobrazenia, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$, $E \subseteq Z$, $A_i \subseteq X$ a $B_i \subseteq Y$ pre každé $i \in I$. Dokážte, že platí:
   a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;
   b) $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$ a ukážte na príklade, že nemusí platiť rovnosť;
   c) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;
   d) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
   e) $f[A] \setminus f[B] = f[A \setminus B]$ za predpokladu, že f je injekcia.

a: KB, AJ, RL, LV, ,
b: KD, MK, VO, JK, ,
c: SG, EP, PS, , ,
d: SH, MM, VT, , ,
e: DH, IH, JŠ, , ,

Domáca úloha č. 6

Zverejnená 5.3.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 18.3.2019.
Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

Za predpokladu, že A, B, A_i, B_i (pre každé $i \in \mathbb{N}$) sú ľubovoľné množiny, dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia.

Poznámka 1: Tvrdenia v prvej úlohe by sa mohli dať dokázať matematickou indukciou. Skúste sa zamyslieť nad tým, či sa dá matematická indukcia použiť aj v druhej úlohe, alebo to treba dokazovať nejakým iným spôsobom.

Poznámka 2: Aj ste schopní dokázať tvrdenia v druhej časti a potom vysvetliť, že z nich vyplývajú tvrdenia v prvej časti, tak to je samozrejme úplne legitímne riešenia. (A ak budú vaše argumenty správne, tak znamená plný počet bodov.) Stručne: Môžete to riešiť v inom poradí, ako je to zadané – ak vám to nejako pomôže.

1. (a) $B \cup \left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=0}^{n} (B \cup A_i)$
   (b) Ak pre každé $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ platí $A_i \subseteq B_i$, tak aj $\bigcup_{i=0}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} B_i$.
   (c) Ak pre každé $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ platí $A_i \subseteq B_i$, tak aj $\bigcap_{i=0}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} B_i$.
   (d) Ak pre niektoré $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ platí $A_i \cap B = \emptyset$, tak platí aj $\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i \right) \cap B = \emptyset$.
2. (a) $B \cup \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=0}^{\infty} (B \cup A_i)$
   (b) Ak pre každé $i \in \mathbb{N}$ platí $A_i \subseteq B_i$, tak aj $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$.
   (c) Ak pre každé $i \in \mathbb{N}$ platí $A_i \subseteq B_i$, tak aj $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$.
   (d) Ak pre nejaké $i \in \mathbb{N}$ platí $A_i \cap B = \emptyset$, tak platí aj $\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \right) \cap B = \emptyset$.

a: KB, AJ, MK, VO, JŠ, ,
b: SG, DH, EP, SH, JK, ,
c: RL, PS, VT, LV, ,
d: KD, IH, MM, , , ,

Domáca úloha č. 7

Zverejnená 12.3.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 25.3.2019.
Táto domáca úloha je za 6 bodov.

Pripomínam, že označenie $f^{-1}[B]$ označuje *vzor* množiny B v zobrazení f (a nie obraz množiny B v inverznom zobrazení f^{-1}).

1. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte:
   a) f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné $A \subseteq X$ platí $A = f^{-1}[f[A]]$;
   b) f je surjekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné $C \subseteq Y$ platí $f[f^{-1}[C]] = C$;
   c) f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné $A, B \subseteq X$ platí $A \subseteq B \Leftrightarrow f[A] \subseteq f[B]$;
   d) f je surjekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné $C, D \subseteq Y$ platí $C \subseteq D \Leftrightarrow f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D]$.

a: KB, AJ, MK, VO, JŠ, ,
b: SG, DH, EP, SH, JK, ,
c: RL, PS, VT, LV, ,
d: KD, IH, MM, , , ,

Domáca úloha č. 8

Zverejnená 18.3.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 1.4.2019.
Táto domáca úloha je za 6 bodov.

1. Zistite, či dané tvrdenie platí (zdôvodnite ho, alebo vyvráťte resp. nájdite kontrapríklad):
   a) Ak A, B sú ľubovoľné množiny, tak platí
   $$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$
   b) $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$
   c) Ak $f\colon X \to Y$ je ľubovoľné zobrazenie, $A, B \subseteq X$ a platí $|A| \leq |B|$, tak aj $|f[A]| \leq |f[B]|$.
   d) Ak $f\colon X \to Y$ je injekcia, $A, B \subseteq X$ a platí $|A| \leq |B|$, tak aj $|f[A]| \leq |f[B]|$.

a: KB, AJ, MK, VO, JŠ, ,
b: SG, DH, EP, SH, JK, ,
c: RL, PS, VT, LV, ,
d: KD, IH, MM, , , ,

Domáca úloha č. 9

Zverejnená 18.3.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 1.4.2019.
Táto domáca úloha je za 6 bodov.

Nech A, B, C sú množiny, pričom množina C je neprázdna, a $f\colon A \to B$ je zobrazenie.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Potom môžeme definovať zobrazenie $\varphi\colon C^B \to C^A$ predpisom

$$\varphi(g) = g \circ f.$$

1. Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad:
   a) Ak f je surjektívne, tak φ je injektívne.
   b) Ak f je surjektívne, tak φ je surjektívne.
   c) Ak f je bijektívne, tak φ je bijektívne.
   d) Ak f je injektívne, tak φ je injektívne.

a: KB, AJ, MK, VO, JŠ, ,
b: SG, DH, EP, SH, JK, ,
c: RL, PS, VT, LV, ,
d: KD, IH, MM, , , ,

Domáca úloha č. 10

Zverejnená 25.3.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 8.4.2019.
Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

1. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
   a) $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$; b) $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$; c) ${\aleph_0}^{\mathfrak{c}}$; d) $\mathfrak{c}\cdot\aleph_0$

2. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
   a) $(2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0}$; b) $\mathfrak{c}^{2^{\mathfrak{c}}}$; c) $\aleph_0\cdot 2^{\mathfrak{c}}$; d) $(2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}}$;

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ a $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovnosti $a+b=a\cdot b=\max\{a,b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Ak je použitý zápis a^{b^c}, myslí sa tým $a^{(b^c)}$ a nie $(a^b)^c$. (Čo je asi vcelku prirodzené, lebo $(a^b)^c$ by sme mohli prepísať ako a^{bc}; ale pre istotu som to zdôraznil.)
a: KB, AJ, MK, VO, JŠ, ,
b: SG, DH, EP, SH, JK, ,
c: RL, PS, VT, LV, ,
d: KD, IH, MM, , , ,

Domáca úloha č. 11

Zverejnená 25.3.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 8.4.2019.
Celá d.ú. je za 6 bodov. (T.j. každá časť za 3 body.)

1. Nájdite kardinalitu danej množiny:
   a) $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$; c) $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$; d) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

2. Nájdite kardinalitu danej množiny:
   a) $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$; b) $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$; c) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$; d) $\mathbb{C}^{\mathbb{Q}}$;

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$. Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Výsledok by mal byť upravený na niektoré z kardinálnych čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$.
a: KB, AJ, MK, VO, JŠ, ,
b: SG, DH, EP, SH, JK, ,
c: RL, PS, VT, LV, ,
d: KD, IH, MM, , , ,

Domáca úloha č. 12

Zverejnená 1.4.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 15.4.2019.
Táto d.ú. je za 6 bodov.

Zistite, či uvedené tvrdenie platí pre ľubovoľné nekonečné kardinálne čísla a, b, c. Ak platí, tak ho dokážte. Ak nie uveďte kontrapríklad (a zdôvodnite, že je to skutočne kontrapríklad).

a) $a^b = a^c \Rightarrow b = c$

b) $b^a = c^a \Rightarrow b = c$

c) $a^b \leq a^c \Rightarrow b \leq c$

d) $b^a \leq c^a \Rightarrow b \leq c$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.)

a: KB, KD, MM, EP, , , ,
b: SG, IH, MK, PS, , ,
c: SH, DH, VO, LV, JK, ,
d: RL, JŠ, VT, AJ, , , ,

Domáca úloha č. 13

Zverejnená 1.4.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 15.4.2019.
Táto d.ú. je za 6 bodov.

Dané množiny usporiadajte podľa kardinality. Svoje tvrdenia zdôvodnite! (T.j. očakáva sa napríklad odpoveď v tvare napríklad $|A| < |C| = |D| < |B|$ a zdôvodnenie všetkých uvedených nerovností a rovností.)

(a) $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C = \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, D =množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C = \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, D =množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(c) $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $C = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, D =množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$.

Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Výsledok by mal byť upravený na niektoré z kardinálnych čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$.

a: KB, SH, DH, RL, VT, , , , ,
b: SG, KD, MK, EP, JŠ, JK, , , ,
c: AJ, IH, VO, MM, PS, LV, , , ,

Domáca úloha č. 14

Zverejnená 1.4.2019 - odovzdáva sa najneskôr na prednáške 15.4.2019.
Táto d.ú. je za 6 bodov.

Postupnosť (a_n) čísel sa volá *takmer stacionárna,* ak

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \geq m) a_n = a_m.$$

Inými slovami, od určitého čísla m sú už všetky členy tejto postupnosti rovnaké.

Dokážte, že:
a) množina všetkých takmer stacionárnych postupností čísel 0, 1 má kardinalitu $\aleph_0$;
b) množina všetkých takmer stacionárnych postupností prirodzených čísel má kardinalitu $\aleph_0$;
c) množina všetkých takmer stacionárnych postupností reálnych čísel má kardinalitu $\mathfrak{c}$.

a: KB, KD, SH, VO, LV, JK, , , ,
b: SG, DH, IH, RL, PS, , , , , ,
c: AJ, MK, MM, EP, JŠ, VT, , ,