Polia

1. Ktoré z uvedených množín tvoria spolu s obvyklým sčitovaním a násobením pole?
   a) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, b \geq 0\}$
   b) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
   c) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$
   d) $F = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
   e) $F = \{a + \sqrt{3}ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
   f) $F = \{a + \frac{b}{\sqrt{2}}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
   g*) $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}; a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ (Hint: Možno pomôže prepísať si túto množinu do tvaru $F = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in F'\}$, kde $F' = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.)
   h*) $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
   i*) $F = \{a + b\sqrt[3]{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
   j**) $F = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ (Môže byť pre vás užitočný vzorec $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - uw - vw) = \frac{1}{2}(u + v + w)((u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2)$.) [1]
2. V poli $\mathbb{Z}_5$ vyrátajte $2^{-1} + 4$, $(-2) + 4$, $2^{-1} + 3$ a $-4 \odot 3^{-1}$.
3. Napíšte tabuľku násobenia pre $\mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_6$. Viete nejako zdôvodniť, že $\mathbb{Z}_4$ resp. $\mathbb{Z}_6$ nie sú polia?
4. V ľubovoľnom poli F platí:

$$\begin{gathered}
a + b = a + c \Rightarrow b = c \\
(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \\
-(-a) = a \\
-0 = 0 \\
-(a + b) = (-a) + (-b) \\
(a - b)c = ac - bc \\
1 \neq 0 \\
a.a = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1 \\
a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b \\
a.(b_1 + \ldots + b_n) = a.b_1 + \ldots + a.b_n
\end{gathered}$$

5. Na množine $\mathbb{R}^+$ všetkých kladných reálnych čísel zadefinujme operácie $\oplus$ a $\odot$ tak, že $x \oplus y = x.y$ a $x \odot y = x^y$. Ktoré z axióm poľa spĺňa $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$?
6. Nech na množine $M = \{0, 1\}$ sú operácie $+$ a $\cdot$ dané tabuľkami

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	1

   Ukážte, že $(M, +)$ a $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ sú komutatívne grupy a že platí distributívny zákon $(a + b)c = ac + bc$. Je $(M, +, \cdot)$ pole?
7. Zistite, či $(\mathbb{R}, +, *)$, kde $+$ je obvyklé sčitovanie reálnych čísel a pre každé $a, b \in \mathbb{R}$ $a * b = -2ab$, je pole.
8. Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujeme operácie $+$ a $\cdot$ takto:
   a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b).(c, d) = (ac, bd)$,
   b) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
   c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc - bd)$
   d) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (bd - ac, ad + bc)$

[1] Táto úloha je naozaj dosť náročná. Snáď je aspoň trochu zaujímavé vedieť, že sa dá vyriešiť pomerne jednoducho, keď už budete mať nejaké vedomosti o báze a dimenzii vektorových priestorov. Podobnými poľami sa budete zaoberať neskôr v druhom ročníku na algebre. Tiež prezradím, že rovnosť $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-uw-vw)$ sa okrem manuálneho roznásobenia dá overiť aj použitím vhodného determinantu. O determinantoch sa budeme učiť na lineárnej algebre 1.

Je potom $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ pole?

9. Pre ktoré prvky a poľa $\mathbb{Z}_7$ má riešenie rovnica $x^2 = a$? Koľko je takých prvkov v poli $\mathbb{Z}_{109}$?