

## 1 Lineárna závislosť a nezávislosť

- 1.1. Overte, že  $\mathbb{R}$  je vektorový priestor nad poľom  $\mathbb{Q}$ . Dokážte, že v tomto priestore sú  $1$ ,  $\sqrt{2}$  a  $\sqrt{3}$  lineárne nezávislé.
- 1.2. Ukážte, že vo vektorovom priestore  $\mathbb{R}$  nad  $\mathbb{Q}$  (z predošlej úlohy) sú lineárne nezávislé vektory  $1 + 3\sqrt{2}$  a  $2 - \sqrt{2}$ .
- 1.3. Sú  $1$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{6}$  lineárne nezávislé vo vektorovom priestore  $\mathbb{R}$  nad poľom  $\mathbb{Q}$ ? (Hint: Úlohu môže o niečo zjednodušiť, ak sa pozriete na  $1$  a  $\sqrt{3}$  ako prvky priestoru  $\mathbb{R}$  nad poľom  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ .)
- 1.4. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:
  - a)  $(1,2,3)$ ,  $(1,3,2)$ ,  $(2,1,5)$  v  $\mathbb{R}^3$ ,
  - b)  $(1,2,3)$ ,  $(1,3,2)$ ,  $(2,1,5)$ ,  $(1,127,3)$  v  $\mathbb{R}^3$ ,
  - c)  $(1,3,4)$ ,  $(2,1,3)$ ,  $(3,1,4)$  v  $\mathbb{Z}_5^3$
  - d)  $(1,3,4)$ ,  $(2,1,3)$ ,  $(3,1,4)$  v  $\mathbb{Z}_7^3$ .
- 1.5. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore všetkých funkcií z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ :
  - a)  $x + 1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,
  - b)  $1$ ,  $x + a$ ,  $x^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  môžu byť ľubovoľné reálne čísla),
  - c\*)  $1$ ,  $\cos x$ ,  $\cos^2(\frac{x}{2})$ ,
  - d)  $x$ ,  $x(x - 1)$ ,  $x(x - 1)(x - 2)$ ,
  - e)  $1$ ,  $\cos x$ ,  $\cos 2x$ .

## 2 Báza a dimenzia

- 2.1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v  $\mathbb{R}^3$ :
  - a)  $(1,2,3)$ ,  $(1,-2,3)$ ,  $(1,2,-3)$
  - b)  $(1,1,1)$ ,  $(1,1,0)$ ,  $(1,0,1)$
  - c)  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(1,1,1)$ .
- 2.2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v  $\mathbb{Z}_5^3$ :
  - a)  $(1,2,3)$ ,  $(2,3,4)$ ,  $(0,3,1)$
  - b)  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,2)$ ,  $(2,1,3)$
  - c)  $(0,1,2)$ ,  $(3,0,1)$ ,  $(1,0,2)$ .
- 2.3.  $P_n$  označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac  $n$ . Overte, že  $d(P_n) = n + 1$  a že  $1, x - 1, \dots, (x - 1)^n$  je báza tohoto priestoru.
- 2.4. Určte dimenziu podpriestoru  $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ , ak  $\vec{\alpha} = (1, 3, 2, 1)$ ,  $\vec{\beta} = (4, 9, 5, 4)$  a  $\vec{\gamma} = (3, 7, 4, 3)$  v  $\mathbb{R}^4$ .
- 2.5. Nájdite bázu a dimenziu podpriestoru  $P = [(1, 1, 1, 3), (1, 2, 3, 6), (1, 6, 6, 6), (3, 1, 4, 1)]$  priestoru  $\mathbb{Z}_7^3$ .
- 2.6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
  - a)  $(1,1,2)$ ,  $(2,1,3)$  v  $\mathbb{R}^3$ ,
  - b)  $x^2 - 1, x^2 + 1$  v priestore polynómov stupňa najviac 3,
  - c)  $(1,2,3,0)$ ,  $(3,4,1,2)$  v  $\mathbb{Z}_5^4$ .
- 2.7. Ak každý z vektorov  $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$  je lineárnou kombináciou vektorov  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$ , tak  $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \leq d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$ .

### 3 Súčty podpriestorov

- 3.1. Zistite<sup>1</sup>  $d(U)$ ,  $d(V)$ ,  $d(U + V)$ ,  $d(U \cap V)$ , bázu  $U + V$  a bázu  $U \cap V$
- a) v  $\mathbb{R}^2$  pre  $U = [(2, 5)]$ ,  $V = [(1, 3)]$
- b) v  $\mathbb{R}^3$  pre  $U = [(1, 2, 3), (-1, 2, 3)]$ ,  $V = [(2, 1, 4), (-2, 1, 4)]$
- c) v  $\mathbb{R}^4$  pre  $U = [(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$ ,  $V = [(1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1)]$
- d) v  $\mathbb{R}^4$  pre  $U = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$ ,  $V = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)]$ .  
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,4,0; d)2,3,4,1]
- 3.2. Nech  $T = [(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 4, 0)]$  je podpriestor  $(\mathbb{Z}_5)^3$ . Existuje podpriestor  $S$  taký, že  $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$ ? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?
- 3.3. Dokážte, že ak  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  je báza vektorového priestoru  $V$ , tak  $V = [\vec{e}_1] \oplus \dots \oplus [\vec{e}_k]$ .
- 3.4. Ak máme zadané podpriestory

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\},$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x + y - 2z = 0\},$$

$$W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 7y + 3z = 0\},$$

nájdite  $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$  a  $\dim(W_1 + W_2)$ ,  $\dim(W_1 + W_3)$ ,  $\dim(W_2 + W_3)$ .

---

<sup>1</sup>Pri tejto úlohe sa môže hodiť používať elementárne riadkové operácie a úpravu na redukovaný stupňovitý tvar.