Úprava algebraických výrazov

1. Upravte uvedený výrazy na čo najjednoduchší tvar:
   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;
   b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;
   c) $\sqrt{(-3)^2}$;
   d) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$;
2. Zjednodušte zadané výrazy. Zistite aj, pre aké hodnoty premenných sú definované.
   a) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;
   b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$;
   c) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;
   d) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$; (Hint: Čo vychádza po dosadení čísla 1?)
   e) $(x+y+z)^2$;
   f) $(x+y+z)^3$;
   g) $(x+y)(y+z)(x+z)$;
   h) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$;
   i) $\dfrac{x^4-y^4}{x-y}$;
   j) $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$;
   h) $(\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2})(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})$;
   i) $\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}$;
   j) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$;
   k) $\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2(n+2)}$.
3. Čomu sa rovná x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$, $x_1^2-x_1$ a $x_1^2-x_2^2$ pre

   $$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

   (Číslo $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$vystupujúce v tejto úlohe sa volá *zlatý rez* a dá sa s ním stretnúť v rôznych oblastiach.[1])
4. Zistite, či platí uvedená rovnosť pre ľubovoľné reálne čísla, pre ktoré má daný výraz zmysel. (Ak platí, tak sa ju pokúste zdôvodniť. Ak nie, tak nájdite aspoň jeden *konkrétny* kontrapríklad.)
   a) $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;
   b) $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$;
   c) $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$;
   d) $\sqrt{a^2}=a$;
   e) $(\sqrt{a})^2=a$;
   f) $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;
   g) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

Sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Maticový zápis tejto sústavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Zápis ako súčin matice a stĺpcového vektora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x - 2y &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Celé čísla, deliteľnosť, indukcia

1. Dokážte matematickou indukciou, že súčin troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný šiestimi.
2. Dokážte, že súčet tretích mocnín troch po sebe idúcich čísel je deliteľný 9.
3. Dokážte tvrdenie: Číslo n je nepárne *práve vtedy, keď* n^2 je nepárne.
4. Dokážte, že ak k a l sú párne čísla, tak aj číslo $k + l$ je párne. Je pravdivá aj obrátená implikácia?
5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí $4^n > 3^n + 2^n$.
6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
7. Dokážte, že $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$
8. $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$

Reálne, komplexné čísla

1. Ktoré reálne čísla spĺňajú nerovnicu $|x - 2| \leq 5$.
2. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice:
   a) $|x - 2| + |x + 2| = 4$;
   b) $|x - 2| + |x + 2| = 6$;
   c) $|x - 2| + |x + 2| = 2$.

3. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice:
   a) $|x-2|-|x+2|=4$;
   b) $|x-2|-|x+2|=6$;
   c) $|x-2|-|x+2|=2$;
   d) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$.
4. Pre ktoré reálne číslo c má rovnica $|x^2+12x+34|=c$ práve 3 riešenia?
5. Nad reálnymi číslami rozložte na lineárne činitele mnohočlen x^3+4x^2+x-6.
6. Ako sa definuje absolútna hodnota $|x|$ reálneho (resp. komplexného) čísla x? Dokážte, že ak a, b sú komplexné čísla, tak $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$.
7. Nech i je imaginárna jednotka. Dokážte, že $i^{n+4}=i^n$ pre každé prirodzené číslo n.
8. Pre ktoré reálne x má komplexné číslo $x+\frac{\sqrt{5}}{3}i$ absolútnu hodnotu 1.
9. Ak máme dve komplexné čísla $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $z_2=\cos\beta+i\sin\beta$, čomu sa rovná ich súčin z_1z_2? (Moivrova veta)
10. *Vedeli by ste pomocou komplexných čísel odvodiť vzorec pre $\cos 2x$, $\sin 2x$? Dalo by sa to použiť pre $\sin 3x$, $\cos 3x$, $\sin nx$, $\cos nx$?

Množiny

1. Množina M pozostáva z párnych čísel väčších ako $\frac{17}{3}$ a menších ako $\frac{168}{9}$ a tiež z nepárnych kladných čísel menších ako $\frac{323}{32}$. Napíšte všetky prvky množiny M.
2. Určte prienik množín A a B, ak A je množina kladných celých čísel deliteľných troma alebo piatimi, ktoré sú menšie ako $\frac{301}{6}$ a B je množina prvočíselných deliteľov čísla 90.
3. Čomu sa rovná $A\cap B$ a $A\cup B$, ak $A=\{2n; n\in\mathbb{Z}\}$ a $B=\{3n; n\in\mathbb{Z}\}$?
4. Platí $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ pre ľubovoľné množiny A, B?
5. Označme $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. (T.j. $A\triangle B$ je tzv. *symetrická diferencia* množín A, B; obsahuje tie prvky, ktoré patria práve do jednej z týchto dvoch množín.) Zdôvodniť, že $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$.

Rôzne

1. Rozhodnite, či sa priamka v rovine, ktorá je daná rovnicou $2x-5y=-2$ pretína s priamkou, ktorej rovnica je $2x+3y=4$.
2. Nájdite všetky možné predpisy, ktoré všetkým prvkom z množiny

$$M=\{\left(\frac{1+3i}{1-3i}\right)^2-\left(\frac{1-3i}{1+3i}\right)^2, \frac{1}{i}+\frac{1-i}{1+i}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\}$$

   jednoznačne priradia prvky z množiny reálnych čísel patriacich do M.
3. Dokážte, že $\sqrt{2}$ aj $\sqrt{3}$ sú iracionálne čísla.
4. Dokážte, že $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je iracionálne číslo.

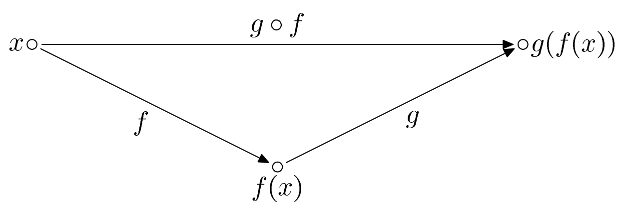
1 Definícia zobrazenia

1.1. Ak $A \neq \emptyset$, nájdite všetky zobrazenia $A \to \emptyset$ a $\emptyset \to A$. Existuje zobrazenie z $\emptyset$ do $\emptyset$?
1.2. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení množiny M do množiny N?
1.3. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje injekcií/bijekcií $M \to N$?
1.4. Nech A je konečná množina a $f\colon A \to A$ je zobrazenie. Dokážte:
a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.
Ukážte na príklade, že pre nekonečné množiny tieto tvrdenia vo všeobecnosti neplatia.

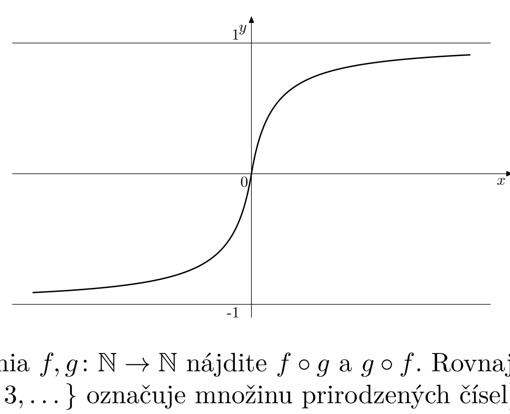
2 Skladanie zobrazení

Ak $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$, tak $g \circ f\colon X \to Z$ je definované ako

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



2.1. Pre dané zobrazenia $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? Vedeli by ste načrtnúť grafy f, g, $g \circ f$, $f \circ g$?
a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$;
b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$;
c) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$;
d) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = x^2$;
e) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \geq 0, \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x < 0. \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \notin (-1,1), \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x \in (-1,1), x \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \in (-1,1), x < 0 \end{cases}$



2.2. Pre dané zobrazenia $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ označuje množinu prirodzených čísel)

a) $f(n) = 2n$, $g(n) = \lceil n/2 \rceil$;

b) $f(n) = n + 1$, $g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{ak } n \geq 2, \\ 1 & \text{ak } n = 1. \end{cases}$

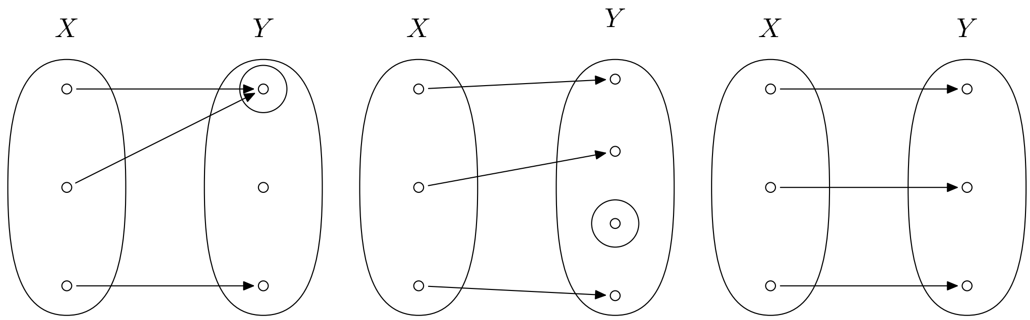
3 Injekcia, surjekcia, bijekcia

Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je

- *injekcia,* ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in X$ z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ vyplýva $x_1 = x_2$-
- *surjekcia,* ak pre ľubovoľné $y \in Y$ existuje $x \in X$, ktoré sa naň zobrazí.
- *bijekcia,* ak je injekcia aj surjekcia.

Dve ekvivalentné definície injekcie:

$$(\forall x_1, x_2 \in X) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



3.1. Dokážte: Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Platí aj opačná implikácia? Musí byť f surjekcia?

3.2. Dokážte: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.

3.3. Dokážte: Ak $g \circ f$ je bijekcia, tak f je injekcia a g je surjekcia.

3.4. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $X \neq \emptyset$ (t.j. X je neprázdna množina). Potom:
a) f je injekcia práve vtedy, keď existuje g také, že $g \circ f = id_X$.
b) f je surjekcia práve vtedy, keď existuje h také, že $f \circ h = id_Y$.
c) K zobrazeniu f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia. (Tým sme znovu dokázali tvrdenie hovoriace, že zobrazenie je bijektívne práve vtedy, keď k nemu existuje inverzné zobrazenie.)

3.5. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, $h\colon Y \to X$ sú zobrazenia. Ak g aj h sú inverzné zobrazenia k f, tak $g = h$.

3.6. Nech $f\colon X \to Y$ je surjekcia a $g, h\colon Y \to Z$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.

3.7. Nech $f\colon Y \to Z$ je injekcia a $g, h\colon X \to Y$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.

3.8. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je surjekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Y \to Z$ platí: Ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.

3.9. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je injekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Z \to X$ platí: Ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.

3.10. LAG 1, 1.1.19(7): Pre zobrazenia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definujme ich súčet ako zobrazenie

$$f + g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

a súčin ako zobrazenie

$$f \cdot g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Je súčet, resp. súčin ľubovoľných dvoch bijekcií zo $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Z}$ znova bijekcia?

4 Inverzné zobrazenia

4.1. Nájdite príklad zobrazenia $f\colon X \to Y$, pre ktoré existuje ľavé inverzné zobrazenie, ale neexistuje pravé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $g\colon Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$, ale neexistuje $h\colon Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$.

4.2. Nájdite príklad zobrazenia $f\colon X \to Y$, pre ktoré existuje pravé inverzné zobrazenie, ale neexistuje ľavé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $h\colon Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$, ale neexistuje $g\colon Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$.

5 Vzor a obraz množiny*

K týmto úlohám sa na cvičení pravdepodobne *nestihneme* dostať, zatiaľ ich môžete ignorovať. (Ale ak vás zaujmú, môžete skúsiť niektoré z nich vyriešiť. Každopádne sa k veciam takéhoto typu neskôr dostanete na predmete 1-MAT-140 Diskrétna matematika (1) – čiže časom sa ich budete musieť naučiť.)

Pre $f\colon X \to Y$ a podmnožiny $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ označujeme

$$f[A] = \{f(x); x \in A\}$$
$$f^{-1}[B] = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

Inak povedané:

$$y \in f[A] \Leftrightarrow (\exists a \in A) y = f(a)$$
$$x \in f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in B$$

5.1. Dokážte: Ak $A \subseteq B$, tak $f[A] \subseteq f[B]$.

5.2. Dokážte: $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$, $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.

5.3. Ktoré z nasledujúcich tvrdení platia a ktoré neplatia? Zdôvodnite.
a) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$
b) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$
c) $f[A \cap B] \supset f[A] \cap f[B]$
d) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
e) $f^{-1}[A \cap B] \subset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
f) $f^{-1}[A \cap B] \supset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
g) $f[f^{-1}[B]] = B$
h) $f[f^{-1}[B]] \subset B$
i) $f^{-1}[f[A]] = A$
j) $f^{-1}[f[A]] \subset A$
k) $g \circ f[A] = g[f[A]]$

5.4. Ak X je množina, tak $P(X)$ budeme označovať množinu všetkých jej podmnožín. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $g\colon P(X) \to P(Y)$ je zobrazenie definované tak, že $g(A) = f[A]$ pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq X$. Dokážte, že f je prosté práve vtedy, keď g je prosté.

5.5. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.

5.6. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[B \setminus A] = f[B] \setminus f[A]$.

1 Binárne operácie

1.1. Vypíšte všetky možné binárne operácie na množine $\{0,1\}$. Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku každému prvku aj inverzný?

1.2. Dokážte, že ak $\circ$ je binárna operácia na množine A a $\circ$ je asociatívna, tak ľubovoľné uzátvorkovanie výrazu $a \circ b \circ c \circ d$ predstavuje ten istý prvok.[1]

1.3*. Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce výsledky (ak sa to dá).

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

2 Grupy

2.1. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ (celé čísla s obvyklým násobením)
b) $(\mathbb{R}, \cdot)$ (reálne čísla s obvyklým násobením)
c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, d) $(\mathbb{C}, +)$, e) $(\mathbb{C}, \cdot)$, f) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
g) $(\mathbb{R}^2, +)$ (so sčitovaním definovaným po zložkách)
h) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$, $a * b = a + b - 1$
i) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ s operáciou $*$, $a * b = ab + a + b$
j) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
k) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
l) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$

2.2. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade $M = \{1,2,3\}$.

2.3. Je $(\mathbb{R}, *)$, kde $a * b = ab + a + b$, grupa? Ak nie, vedeli by ste vynechať niektorý prvok a z množiny $\mathbb{R}$ tak, aby $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ bola grupa?

2.4. Nech $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je G s operáciou $\cdot$ (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Je $(C_n, \cdot)$ grupa?

2.5. Dokážte, že ak $(G, \cdot)$ je grupa a $x, y, z \in G$ tak platí

$$xy = xz \Rightarrow y = z;$$
$$yx = zx \Rightarrow y = z.$$

(Tzv. *zákony o krátení* v grupe.)

2.6. Nech $(G, *)$ je grupa a e je jej neutrálny prvok.. Dokážte:
a) $x * y = y * x \Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$.
b) Ak $x * x = e$ pre všetky $x \in G$, tak G je komutatívna.

2.7. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a \colon G \to G$ definované ako $f_a(b) = a \circ b$ je bijekcia.

2.8. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $f \colon G \to G$ definované ako $f(a) = a^{-1}$ je bijekcia.

2.9*. Nech G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G. Potom G je

[1] Máme tu na mysli uzátvorkovania *bez výmeny poradia,* ktoré už jednoznačne určujú výsledok operácie. Aspoň bez dôkazu spomeniem, že to isté platí aj pre ľubovoľný počet prvkov. Počet uzátvorkovaní výrazu s n prvkami je n-té *Catalanove číslo.*

grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné $a, b \in G$ majú rovnice

$$a \circ x = b$$
$$y \circ a = b$$

riešenie v G (inými slovami, pre ľubovoľné $a, b \in G$ existujú $x, y \in G$, ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

2.10*. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

2.11*. Nech $*$ je binárna operácia na množine G, ktorá je
a) asociatívna,
b) existuje prvok $e \in G$ taký, že $(\forall x \in G) e * x = x$
c) pre každý prvok $x \in G$ existuje $y \in G$ také, že $x * y = e$ (kde e označuje prvok z časti b) t.j.

$$(\forall x \in G)(\exists y \in G) y * x = e.$$

Dokážte, že potom $(G, *)$ je grupa. (Všimnite si, že uvedené podmienky sa síce podobajú na definíciu neutrálneho a inverzného prvku, ale v oboch prípadoch tam máme iba jednu z dvoch rovností, ktoré vystupujú v definícii.)

2.12. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

2.13. Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \dots, a_n\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Dokážte, že $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$.

2.14. Nech $*$ je binárna operácia na množine A, taká, že pre každé $a, b, c \in A$ platí $a * (b * c) = (a * c) * b$ a $*$ má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.

2.15. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

2.16. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme $(a, b) \square (c, d) = (2ac, b + d)$, je grupa.

2.17. Nech $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

2.18. Nech $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

2.19. Nech $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$ sú grupy. Dokážte, že aj $G \times H$ s operáciou $*$ definovanou ako

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

je grupa.

2.20. Doplňte nasledujúcu tabuľku

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

tak aby ste dostali grupu.

2.21. Ak pre každý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

2.22. Nech G je grupa, e je jej neutrálny prvok a $a, b \in G$. Ukážte, že ak $(ab)^2 = e$, tak aj $(ba)^2 = e$.

Tabuľka grupy S_3:

	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$
id	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	id
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$

1 Podgrupy

H je podgrupa grupy $(G,*)$ ak:

- pre ľubovoľné $x,y\in H$ platí $x*y\in H$ a $x^{-1}\in H$;
- pre ľubovoľné $x,y\in H$ platí $x*y^{-1}\in H$.

Každá podgrupa obsahuje neutrálny prvok.

1.1. Nájdite všetky podgrupy grupy S_3. (LAG1 1.4.6.(8))

1.2. Ukážte, že $H=\{\frac{m}{n};m,n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$.

1.3. Je množina $A=\{a+b\sqrt{2};a,b\in\mathbb{Q}\}$ podgrupa grupy $(\mathbb{R},+)$?

1.4. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? (Viete na základe výsledku zdôvodniť, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?)

1.5. Je množina $H=\{\ln a; a\in\mathbb{Q}, a>0\}$ podgrupou grupy $(\mathbb{R},+)$?

1.6. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g\in G$. Ukážte, že $gHg^{-1}=\{ghg^{-1};h\in H\}$ je podgrupa grupy G.

1.7. Nech $M\neq\emptyset$ a G je množina všetkých bijektívnych zobrazení z M do M. Je $\circ$ binárna operácia na G? Je $(G,\circ)$ grupa? Je komutatívna?

1.8. Uvažujme funkcie $f_i\colon\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ definované ako $f_1(x)=x$, $f_2(x)=1/x$, $f_3(x)=1-x$, $f_4(x)=1/(1-x)$, $f_5(x)=(x-1)/x$, $f_6(x)=x/(x-1)$. Dokážte, že $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$ s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu. Zostavte tabuľku grupovej operácie a zistite, či je táto grupa izomorfná s grupou S_3.

1.9. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou tu rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

1.10*. Nech G je grupa a H_1, H_2 sú jej podgrupy. Dokážte, že $H_1\cup H_2$ je podgrupa práve vtedy, keď $H_1\subseteq H_2$ alebo $H_2\subseteq H_1$.

1.11*. Ak A, B, C sú podgrupy grupy G a $C\subseteq A\cup B$, tak $C\subseteq A$ alebo $C\subseteq B$.

2 Homomorfizmy grúp

$f\colon(G,*)\to(H,\square)$

$$f(x*y)=f(x)\square f(y)$$

2.1. Dokážte: Nech $(G,*)$ a $(H,\circ)$ sú grupy a G je komutatívna. Ak existuje izomorfizmus $f\colon G\to H$, tak aj $(H,\circ)$ je komutatívna grupa. (Teda grupa izomorfná s komutatívnou grupou je komutatívna.) Platí toto tvrdenie, ak predpoklad o existencii izomorfizmu nahradíme požiadavkou na existenciu homomorfizmu? Čo sa stane, ak budeme požadovať existenciu surjektívneho homomorfizmu (=epimorfizmu)?

2.2. Zistite, či sú grupy $(\mathbb{Z}_4,+)$ a $(\mathbb{Z}_5\setminus\{0\},\cdot)$ izomorfné.

2.3. Sú grupy $(S_3,\circ)$ a $(\mathbb{Z}_6,+)$ izomorfné?

2.4. Sú grupy $(\mathbb{Z}_6,+)$ a $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,+)$ izomorfné? (Operáciu $+$ na množine $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ chápeme po zložkách, t.j. $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1\oplus_2 x_2, y_1\oplus_3 y_2)$. Operácie $\oplus_2$ a $\oplus_3$ označujú sčitovanie modulo 2 resp. modulo 3 – na tomto mieste som použil iné označenie, aby som zdôraznil, že na prvej a na druhej súradnici máme inú operáciu.)

2.5. Sú grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ izomorfné?

2.6. Nájdite všetky homomorfizmy $(S_3, \circ) \to (\mathbb{Z}_2, +)$.

2.7. Nech $(G, *)$ je ľubovoľná grupa. Dokážte, že zobrazenie $g \mapsto g * g$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna.

2.8. Dá sa výsledok z predchádajúceho cvičenia použiť na iný dôkaz toho, že $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$ platí pre konečnú komutatívnu grupu $G = \{e, a_1, \ldots, a_n\}$?

2.9. Nech $f, g\colon G \to H$ sú homomorfizmy grúp. Je množina $\{a \in G; f(a) = g(a)\}$ podgrupa grupy G?

1 Relácie ekvivalencie

Relácia na množine M je ľubovoľná podmnožina $R \subseteq M \times M$. Relácia ekvivalencie je taká relácia, ktorá je

- reflexívna: $(\forall x \in M)\ (x,x) \in R$;
- symetrická: $(\forall x,y \in M)\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$;
- tranzitívna: $(\forall x,y,z \in M)\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

1.1. Overte, či relácia R je relácia ekvivalencie na množine M.
a) M je ľubovoľná množina, $R = M \times M$;
b) M je ľubovoľná množina, $R = \{(x,x); x \in M\}$
c) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Z}\}$;
d) $M = \mathbb{Z}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
e) $M = \mathbb{N}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
f) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \in M \times M; |a - b| \leq 1\}$;
g) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x^2 = y^2\}$;
h) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, t.j. M je množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{N}$ a $R = \{(A,B) \in M \times M; A \triangle B$ je konečná$\}$ (t.j. množiny A a B sú v relácii R, ak ich symetrický rozdiel $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná množina);
i) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R = \{(A,B) \in M \times M;$ existuje bijekcia z A do $B\}$;
j) $M = \mathbb{Z}$; $R = \{(x,y) \in M \times M; 3 \mid x + 2y\}$;
k) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Q}\}$;
l) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1)\}$;
m) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)\}$;
n) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1)\}$;
o) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \vee x_2 = y_2)\}$;
p) $M = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f,g) \in M \times M; f(1) = g(1)\}$;
q) $M = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f,g) \in M \times M; f(1) = g(0)\}$;
r) $M = G$, kde $(G,\circ)$ je grupa, H je podgrupa grupy G a $R = \{(x,y) \in M \times M; xy^{-1} \in H\}$. Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?
s) M je ľubovoľná množina, $f\colon M \to S$ je ľubovoľné zobrazenie a $R = \{(x,y) \in M \times M; f(x) = f(y)\}$. (=LAG1, 1.6.12(1)) Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?

1.2. Koľko existuje relácií ekvivalencie na trojprvkovej množine $\{0,1,2\}$?

1.3. Dokážte: Ak R_1 a R_2 sú relácie ekvivalencie na tej istej množine M, tak aj $R = R_1 \cap R_2$ je relácia ekvivalencie na M. (Všimnite si, že $(a,b) \in R \Leftrightarrow (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2$.)

2 Faktorové grupy

Ak máme komutatívnu grupu $(G,+)$ a nejakú jej podgrupu H, tak predpis[1]

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x - y \in H$$

určuje reláciu ekvivalencie na množine G.

Množinu všetkých tried tejto ekvivalencie označíme ako $[G/H]$, t.j.

$$[G/H] = \{[a]; a \in G\}.$$

Predpis

$$[a] + [b] = [a + b]$$

[1] Ak by sme označovali operáciu ako $\cdot$, tak by sme tú istú podmienku zapísali ako $xy^{-1} \in H$.

potom určuje dobre definovanú binárnu operáciu na množine G/H. Dá sa dokázať, že G/H s touto operáciou tvorí grupu. Túto grupu voláme faktorová grupa grupy $(G,+)$ podľa podgrupy H.

Veta o faktorovom izomorfizme. Nech G, G' sú grupy, navyše G je komutatívna.[2] Ak $f\colon G \to G'$ je surjektívny homomorfizmus, tak $\operatorname{Ker} f$ je podgrupa grupy G a platí

$$G/\operatorname{Ker} f \cong G',$$

t.j. faktorová grupa G podľa $\operatorname{Ker} f$ je izomorfná s G'.

2.1. Ukážte, že faktorová grupa G/H je izomorfná s grupou K. (Aspoň jednu úlohu skúste vyriešiť priamo pomocou definície faktorovej grupy a aspoň jednu úlohu pomocou vety o faktorovom izomorfizme.)
a) $G = (\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$, $H = \{(x,y); x+2y=0\}$, $K = (\mathbb{R},+)$;
b) $G = (\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$, $H = \{(x,3x); x\in\mathbb{R}\}$, $K = (\mathbb{R},+)$;
c) $G = (\mathbb{C},+)$, $H = \mathbb{R}$, $K = (\mathbb{R},+)$;
d) $G = (\mathbb{Z}_8,+)$, $H = 2\mathbb{Z}_4 = \{0,2,4,6\}$, $K = (\mathbb{Z}_2,+)$;
e) $G = (\mathbb{Z}_8,+)$, $H = 4\mathbb{Z}_2 = \{0,4\}$, $K = (\mathbb{Z}_4,+)$;
f) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $K = \{c\in\mathbb{C}; |c| = 1\}$;
g) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x\in\mathbb{R}; x>0\}$, $K = \{c\in\mathbb{C}; |c|=1\}$;
h) $G = (\mathbb{Z},+)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z\in\mathbb{Z}\}$, $K = \mathbb{Z}_4$;
i) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = \mathbb{R}^+$, $K = (\mathbb{Z}_2,+)$;
j) $G = (\mathbb{R}^*,\cdot)$, $H = \{\pm 1\}$, $K = (\mathbb{R}^+,\cdot)$

2.2. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c\in\mathbb{C}; |c|=1\},\cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c\in\mathbb{C}; c^n = 1\},\cdot)$
a) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)/\{c\in\mathbb{C}; c^n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)/\mathbb{R}^+$ (pod $\mathbb{R}^+$ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0\notin\mathbb{R}^+$), S
b) $(\mathbb{R},+)/\mathbb{Z}$, S/C_n, S
c) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)/C_n$
d) $(\{c\in\mathbb{C}; c^n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\},\cdot)/\mathbb{R}^+$, C_n
e) $(\{c\in\mathbb{C}; c^n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\},\cdot)/C_n$, $\mathbb{R}^+$
f) C_{12}/C_4, $\mathbb{Z}_3$
g) $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,+)/(\mathbb{Z}_2\times\{0\})$, $\mathbb{Z}_3$

2.3. Nech G je komutatívna grupa a H je jej podgrupa. Ukážte, že zobrazenie $f(x) = x+h$ je bijekcia medzi H a $[x]_H$. (T.j. pre každú triedu rozkladu G podľa H máme bijekciu medzi H a $[x]_H$.)

2.4. S využitím predošlej úlohy dokážte, že ak G je konečná komutatívna grupa a H je jej podgrupa, tak počet prvkov H delí počet prvkov G. (T.j. $|G|$ je násobkom $|H|$.)[3]

---

[2] Tento predpoklad je tu iba preto, aby vôbec malo zmysel hovoriť o faktorovej podgrupe. Ak sa neskôr budete učiť o normálnych podgrupách, tak zistíte, že faktorové grupy sa dajú robiť aj pre nekomutatívne grupy. Vtedy to však nebude fungovať s ľubovoľnou podgrupou. Prinajmenšom matici by sa s tým mali stretnúť na predmete Algebra v druhom ročníku.

[3] Táto vlastnosť platí aj pre grupy, ktoré nie sú komutatívne. Neskôr sa s ňou ešte stretnete pod názvom *Lagrangeova veta*.

Polia

1. Ktoré z uvedených množín tvoria spolu s obvyklým sčitovaním a násobením pole?
   a) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, b \geq 0\}$
   b) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
   c) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$
   d) $F = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
   e) $F = \{a + \sqrt{3}ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
   f) $F = \{a + \frac{b}{\sqrt{2}}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
   g*) $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}; a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ (Hint: Možno pomôže prepísať si túto množinu do tvaru $F = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in F'\}$, kde $F' = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.)
   h*) $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
   i*) $F = \{a + b\sqrt[3]{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$
   j**) $F = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ (Môže byť pre vás užitočný vzorec $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - uw - vw) = \frac{1}{2}(u + v + w)((u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2)$.) [1]
2. V poli $\mathbb{Z}_5$ vyrátajte $2^{-1} + 4$, $(-2) + 4$, $2^{-1} + 3$ a $-4 \odot 3^{-1}$.
3. Napíšte tabuľku násobenia pre $\mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_6$. Viete nejako zdôvodniť, že $\mathbb{Z}_4$ resp. $\mathbb{Z}_6$ nie sú polia?
4. V ľubovoľnom poli F platí:

$$\begin{gathered}
a + b = a + c \Rightarrow b = c \\
(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \\
-(-a) = a \\
-0 = 0 \\
-(a + b) = (-a) + (-b) \\
(a - b)c = ac - bc \\
1 \neq 0 \\
a.a = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1 \\
a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b \\
a.(b_1 + \ldots + b_n) = a.b_1 + \ldots + a.b_n
\end{gathered}$$

5. Na množine $\mathbb{R}^+$ všetkých kladných reálnych čísel zadefinujme operácie $\oplus$ a $\odot$ tak, že $x \oplus y = x.y$ a $x \odot y = x^y$. Ktoré z axióm poľa spĺňa $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$?
6. Nech na množine $M = \{0, 1\}$ sú operácie $+$ a $\cdot$ dané tabuľkami

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	1

   Ukážte, že $(M, +)$ a $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ sú komutatívne grupy a že platí distributívny zákon $(a + b)c = ac + bc$. Je $(M, +, \cdot)$ pole?
7. Zistite, či $(\mathbb{R}, +, *)$, kde $+$ je obvyklé sčitovanie reálnych čísel a pre každé $a, b \in \mathbb{R}$ $a * b = -2ab$, je pole.
8. Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujeme operácie $+$ a $\cdot$ takto:
   a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b).(c, d) = (ac, bd)$,
   b) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
   c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc - bd)$
   d) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (bd - ac, ad + bc)$

[1] Táto úloha je naozaj dosť náročná. Snáď je aspoň trochu zaujímavé vedieť, že sa dá vyriešiť pomerne jednoducho, keď už budete mať nejaké vedomosti o báze a dimenzii vektorových priestorov. Podobnými poľami sa budete zaoberať neskôr v druhom ročníku na algebre. Tiež prezradím, že rovnosť $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-uw-vw)$ sa okrem manuálneho roznásobenia dá overiť aj použitím vhodného determinantu. O determinantoch sa budeme učiť na lineárnej algebre 1.

Je potom $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ pole?

9. Pre ktoré prvky a poľa $\mathbb{Z}_7$ má riešenie rovnica $x^2 = a$? Koľko je takých prvkov v poli $\mathbb{Z}_{109}$?

1 Vektorové priestory

$(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad R ak $+\colon V \times V \to V$, $\cdot\colon R \times V \to V$ a platí

- $(V, +)$ je komutatívna grupa;
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ pre ľubovoľné $\alpha \in R$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$;
- $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $1\vec{x} = \vec{x}$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in V$.

1.1. Ukážte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$.

1.2. Koľko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha}+\vec{\alpha}+\vec{\alpha}$?

1.3. Zistite, či $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$ pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $r \cdot (a, b) = (ra, 2rb)$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

1.4. Zistite, či $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, ak definujeme $x \oplus y = xy$, $c \odot x = x^c$ pre $x, y \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$.

2 Podpriestory

Ak V je vektorový priestor nad poľom R a M je *neprázdna* podmnožina V, tak tieto podmienky sú ekvivalentné:

- M je podpriestor priestoru V.
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha \in R$ platí $\vec{x} + \vec{y} \in M$, $\alpha\vec{x} \in M$.
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha, \beta \in R$ platí $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in M$.

Ak M je podpriestor, tak $\vec{0} \in M$. (Každý podpriestor obsahuje nulový vektor.)

2.1. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$?
a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

2.2. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?
a) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$
b) nezáporné funkcie
c) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$
d) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) f(x) = f(1 - x)$
e) ohraničené funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f) spojité funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
h) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
i*) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná alebo nekonečná $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2.3. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Ukážte, že $S \cup T$ je podpriestor priestoru V práve vtedy, keď $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$.

2.4. Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \neq \emptyset$ je podmnožina V. Ukážte, že S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $c\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$.

Systémy lineárnych rovníc

1. Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc nad poľom $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & =1 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & =-3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & =1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x_1+x_2 & =1 \\ x_1+x_2+x_3 & =4 \\ x_2+x_3+x_4 & =-3 \\ x_3+x_4+x_5 & =2 \\ x_4+x_5 & =-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & -5y & +3z & +t & =5 \\ 3x & -7y & +3z & -t & =-1 \\ 5x & -9y & +6z & +2t & =7 \\ 4x & -6y & +3z & +t & =8 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrl} x & +2y & +4z & -3t & =0 \\ 3x & +5y & +6z & -4t & =0 \\ 4x & +5y & -2z & +3t & =0 \\ 3x & +8y & +24z & -19t & =0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} x & +4y & -2z & +8t & =12 \\ & y & -7z & +2t & =-4 \\ & & 5z & -t & =7 \\ & & z & +3t & =-5 \end{array}$$

2. Riešte v $\mathbb{Z}_5$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&3&1 \\ 1&2&4&0&2 \\ 2&1&3&4&3 \\ 3&0&4&4&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 3&1&2&2&1 \\ 4&4&2&1&0 \\ 0&1&2&4&1 \\ 2&1&1&2&3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&4&1&1&2 \\ 3&3&3&2&1 \\ 1&4&2&1&1 \\ 4&2&0&3&2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&2&4 \\ 2&3&1&1&3 \\ 4&3&1&3&2 \\ 3&4&3&2&1 \end{array}\right)$
3. Riešte v $\mathbb{R}$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&-2&1&11 \\ 1&1&-3&7 \\ 11&-4&-3&10 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 3&-1&2&7 \\ 1&0&-1&-2 \\ 2&1&1&7 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1 \\ -1&3&-2&3 \\ 0&5&-5&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&0 \\ 4&1&-1&2 \\ 1&2&4&0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&-3&0 \\ 1&-3&-1&0 \\ 2&1&-4&0 \end{array}\right)$
Riešenie: a) nemá riešenie, b) (1,2,3) c) $(t-\frac{3}{5}, t+\frac{4}{5}, t)$, d) $(\frac{20}{47}, \frac{6}{47}, -\frac{8}{47})$, e) $(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t)$
4. Riešte v $\mathbb{Z}_7$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&5 \\ 0&1&1&1&6 \\ 3&1&2&3&0 \\ 0&3&6&1&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&0 \\ 2&1&0&3&1 \\ 3&1&1&1&5 \\ 0&1&2&3&6 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&4&1&4 \\ 1&3&3&1&5 \\ 4&1&5&1&6 \\ 2&3&1&4&2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1 \\ 2&1&2&3&2 \\ 3&1&1&1&1 \\ 0&6&5&3&3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1 \\ 2&3&1&4&2 \\ 1&1&0&1&1 \\ 0&4&4&1&0 \end{array}\right)$
5. Nájdite reálne čísla a, b, c tak, aby graf funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi $(1,2)$, $(-1,6)$ a $(2,3)$.
6. Nájdite hodnotu parametra $b \in \mathbb{R}$, pre ktorú má daná sústava riešenie. Pre túto hodnotu aj vyjadrite množinu riešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= b \\ 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= 4 \end{aligned}$$

7. V závislosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ riešte systém daný maticou:
a) $\left(\begin{array}{cc|c} a&1&a^2 \\ 1&a&1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cc|c} a&1&a^3 \\ 1&a&1 \end{array}\right)$
8. Ako vyzerajú, v závislosti od parametra p, riešenia sústavy danej maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} p&1&1&1&1 \\ 1&p&1&1&1 \\ 1&1&p&1&1 \\ 1&1&1&p&1 \end{array}\right)$

9*. O sústave n rovníc o n neznámych nad poľom $\mathbb{R}$ vieme, že jej koeficienty tvoria aritmetickú postupnosť (ako napríklad pre maticu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&4 \\ 5&6&7&8 \\ 9&10&11&12 \end{array}\right)$) a že táto sústava má jediné riešenie. Nájdite riešenie sústavy.

1 Lineárna závislosť a nezávislosť

1.1. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$. Dokážte, že v tomto priestore sú 1, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.
1.2. Ukážte, že vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ (z predošlej úlohy) sú lineárne nezávislé vektory $1+3\sqrt{2}$ a $2-\sqrt{2}$.
1.3. Sú 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ lineárne nezávislé vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$? (Hint: Úlohu môže o niečo zjednodušiť, ak sa pozriete na 1 a $\sqrt{3}$ ako prvky priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2}; a,b\in\mathbb{Q}\}$.)
1.4. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:
a) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5) v $\mathbb{R}^3$,
b) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5), (1,127,3) v $\mathbb{R}^3$,
c) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_5^3$
d) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_7^3$.
1.5. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$:
a) $x+1$, x^2, x^3,
b) 1, $x+a$, x^2+bx+c (a,b,c môžu byť ľubovoľné reálne čísla),
c*) 1, $\cos x$, $\cos^2(\frac{x}{2})$,
d) x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$,
e) 1, $\cos x$, $\cos 2x$.

2 Báza a dimenzia

2.1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$:
a) (1,2,3), (1,-2,3), (1,2,-3)
b) (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1)
c) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1).
2.2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{Z}_5^3$:
a) (1,2,3), (2,3,4), (0,3,1)
b) (1,0,0), (0,1,2), (2,1,3)
c) (0,1,2), (3,0,1), (1,0,2).
2.3. P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n. Overte, že $d(P_n)=n+1$ a že $1, x-1, \dots (x-1)^n$ je báza tohoto priestoru.
2.4. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha}=(1,3,2,1)$, $\vec{\beta}=(4,9,5,4)$ a $\vec{\gamma}=(3,7,4,3)$ v $\mathbb{R}^4$.
2.5. Nájdite bázu a dimenziu podpriestoru $P=[(1,1,1,3),(1,2,3,6),(1,6,6,6),(3,1,4,1)]$ priestoru $\mathbb{Z}_7^3$.
2.6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
a) (1,1,2), (2,1,3) v $\mathbb{R}^3$,
b) x^2-1, x^2+1 v priestore polynómov stupňa najviac 3,
c) (1,2,3,0), (3,4,1,2) v $\mathbb{Z}_5^4$.
2.7. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1,\dots,\vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1,\dots,\vec{\beta}_k]) \le d([\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_m])$.

3 Súčty podpriestorov

3.1. Zistite[1] $d(U)$, $d(V)$, $d(U+V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U+V$ a bázu $U \cap V$
a) v $\mathbb{R}^2$ pre $U = [(2,5)]$, $V = [(1,3)]$
b) v $\mathbb{R}^3$ pre $U = [(1,2,3),(-1,2,3)]$, $V = [(2,1,4),(-2,1,4)]$
c) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,0,1,0),(1,0,0,1)]$, $V = [(1,1,1,0),(1,0,1,1)]$
d) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$, $V = [(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)]$.
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,4,0; d)2,3,4,1]

3.2. Nech $T = [(1,3,2),(2,1,3),(3,4,0)]$ je podpriestor $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?

3.3. Dokážte, že ak $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}$ je báza vektorového priestoru V, tak $V = [\vec{e_1}] \oplus \dots \oplus [\vec{e_k}]$.

3.4. Ak máme zadané podpriestory

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y-z=0\},$$
$$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 3x+y-2z=0\},$$
$$W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-7y+3z=0\},$$

nájdite $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ a $\dim(W_1+W_2)$, $\dim(W_1+W_3)$, $\dim(W_2+W_3)$.

[1] Pri tejto úlohe sa môže hodiť používať elementárne riadkové operácie a úpravu na redukovaný stupňovitý tvar.

Riadková ekvivalencia, úprava na RTM

Úlohy, ktoré sú tu, sa dajú riešiť použití elementárnych riadkových operácií alebo úpravou na redukovaný stupňovitý tvar. (Samozrejme, nie je to jediná možnosť ako ich riešiť.)

Matice A a B sú riadkovo ekvivalentné práve vety, keď

- A aj B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou stupňovitou maticou;
- $S_A = S_B$ (t.j. ich riadky generujú rovnaký podpriestor).

1. Nájdite redukované trojuholníkové matice riadkovo ekvivalentné s nasledujúcimi maticami a) nad poľom $\mathbb{R}$ b) nad poľom $\mathbb{Z}_5$
   $\begin{pmatrix} 2&3&1\\ 1&2&1\\ 3&4&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&1&3\\ 3&2&2\\ 0&4&3\\ 4&1&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2&3&4&1\\ 3&2&3&2\\ 1&4&0&0\\ 4&1&2&3 \end{pmatrix}$
2. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru $(\mathbb{Z}_5)^4$:
   a) $(1,2,0,0)$, $(3,4,0,1)$
   b) $(1,2,3,4)$, $(1,1,1,1)$, $(3,2,1,0)$
   c) $(2,3,4,1)$, $(3,2,4,1)$, $(0,2,3,2)$
   d) $(1,3,1,4)$, $(3,0,4,3)$, $(2,3,1,1)$
3. Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom $\mathbb{R}$:
   a) $\begin{pmatrix} 1&2\\ 0&4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2&3\\ 5&0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3&0\\ 1&2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&5\\ 4&2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1&2\\ 3&4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2&3\\ 1&2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&1\\ 4&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&4\\ 0&5 \end{pmatrix}$
4. Zistite, ktoré z daných vektorov patria do podpriestoru $[(1,4,1,0),(2,3,-2,-3),(0,2,-5,-6)]$ priestoru $\mathbb{R}^4$: a) $(4,11,-3,-3)$, b) $(1,0,11,12)$, c) $(3,0,4,1)$, d) $(1,-1,2,-2)$, e) $(1,-1,2,3)$.
5. Zistite, či $[\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2] \subseteq [\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3]$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^4$ nad poľom $\mathbb{R}$, ak $\vec{\gamma}_1 = (1,1,5,1)$, $\vec{\gamma}_2 = (1,0,2,1)$, $\vec{\gamma}_3 = (2,1,0,1)$, $\vec{\beta}_1 = (1,1,5,1)$ a $\vec{\beta}_2 = (-1,1,6,-2)$.
6. Zistite hodnosti matíc
   $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 0&-1&3&8&0\\ 0&0&2&3&0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&0&-1&2&3\\ 0&0&5&0&1\\ 0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&0&\dots&0\\ 0&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&\dots&1\\ 1&1&\dots&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2&-1&3&-2&4\\ 4&-2&5&1&7\\ 2&-1&1&8&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&3&5&-1\\ 2&-1&-3&4\\ 5&1&-1&7\\ 7&7&9&1 \end{pmatrix}$
7. Upravte danú maticu nad poľom $\mathbb{R}$ na redukovaný trojuholníkový tvar a určte hodnosť matice
   $\begin{pmatrix} 1&-2&-2&2\\ 2&2&-1&-1\\ 3&3&-4&-4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&-1&3&2&5\\ 5&-3&2&3&4\\ 1&-3&-5&0&-7\\ 7&-5&1&4&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&3&0&5&0&-1\\ 2&6&1&10&0&0\\ 5&15&2&25&-1&-4\\ 3&9&1&15&0&-1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4&3&-5&2&3\\ 8&6&-7&4&2\\ 4&3&-8&2&7\\ 4&3&1&2&-5\\ 8&6&-1&4&-6 \end{pmatrix}$
8. Určte hodnosť danej matice v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$
   $A = \begin{pmatrix} 1&c&-1&2\\ 2&-1&c&5\\ 1&10&-6&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&2&c&2c\\ 1&-1&3&-c\\ 2&3&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2&c{+}1&0\\ 2&c{-}1&2c\\ c&c&c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2&c{+}1&0\\ 4&c{-}1&2c\\ c&c&c \end{pmatrix}$
9. Zistite, či priestor [(2,4,4,2,4),(3,1,1,2,2),(4,3,3,2,0)] je podpriestor priestoru [(1,1,0,1,4),(2,1,3,3,1),(3,2,1,1,3)] a) nad $\mathbb{Q}$, b) nad $\mathbb{Z}_5$, c) nad $\mathbb{Z}_7$.
10. Zistite, ktoré z daných matíc sú navzájom riadkovo ekvivalentné:
    $\begin{pmatrix} 2&3&1\\ 4&3&3\\ 1&2&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&3&1\\ 2&4&3\\ 3&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&3\\ 1&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&0&1\\ 0&3&2\\ 1&0&3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&1\\ 2&1&3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&2&1\\ 4&2&1\\ 1&0&1 \end{pmatrix}$
11. Nájdite bázu daného podpriestoru a určite jeho dimenziu:
    a) $[(1,1,0,-1),(0,1,2,1),(1,0,1,-1),(1,1,-6,-3),(-1,-5,1,0)]$ v $\mathbb{R}^4$;
    b) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,-2,1,0)]$ v $\mathbb{R}^5$
    c) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_5^5$
    d) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_7^5$.
12. Zistite, pre aké hodnoty parametra c sú dané vektory lineárne závislé
    a) $(-1,0,-1)$, $(2,1,2)$, $(1,1,c)$ v $\mathbb{R}^3$;
    b) $(1,1,3)$, $(2,1,2)$, $(c,0,-c)$ v $\mathbb{R}^3$;
    c) $(2,0,-1)$, $(3,2,0)$, $(1,-2,c)$ v $\mathbb{R}^3$.

13*. Určite hodnosť matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & a_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, že $a_1, \dots, a_{n+1}$ sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre všetky $i \neq j$). Pri riešení tejto úlohy môžete použiť fakt, že elementárne stĺpcové operácie nemenia hodnosť, resp. to, že $h(A) = h(A^T)$. (Tento fakt bude na prednáške neskôr.) Ale mala by sa dať vyriešiť aj bez použitia tejto veci.[1]

[1]Táto matica sa volá Vandermondova matica (Vandermonde matrix). Môžete o nej niečo viac nájsť na rôznych miestach (základné veci napríklad na `https://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix`). Determinant tejto matice je vypočítaný v príklade 6.2.17(2) a úlohe 6.2.20(2) v LAG1.

Ak A je typu $m \times \boxed{n}$ a B je typu $\boxed{n} \times k$, tak súčin $C = AB$ má rozmery $m \times k$ a

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}.$$

Matica lineárneho zobrazenia $f\colon R^k \to R^n$ je matica typu $k \times n$ nad poľom R, ktorej i-ty riadok je vektor $f(\vec{e}_i)$, t.j. obraz i-teho vektora zo štandardnej bázy.

Súčin matíc a skladanie lineárnych zobrazení:

$$M_{g\circ f} = M_f \cdot M_g$$

Obraz vektora a súčin:

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot M_f$$

1 Lineárne zobrazenia

1.1. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \ldots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.

1.2. Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F. Dokážte:
Ak S je podpriestor vektorového priestoru V, tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W.
Ak T je podpriestor vektorového priestoru W, tak $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V.

2 Súčin matíc

2.1. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A + B)^2$, ak $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

2.2. Vyrátajte EA a AE pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ a a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vedeli by ste nájsť riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice A maticu EA resp. AE? (Viac sa o súvise násobenia matíc a elementárnych riadkových/stĺpcových operácií môžete dozvedieť v LAG1 v časti 4.4).

2.3. Pre štvorcovú maticu C typu $n\times n$ budeme výraz $\mathrm{Tr}(C) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nn}$ nazývať *stopa matice* C.
Ukážte, že ak A, B sú matice typu $n \times n$ nad poľom F, tak platia rovnosti $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)^T$ a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
Zistite, či pre ľubovoľné matice A, B, C typu $n\times n$ platia vzťahy $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA)$ a $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, matica A je symetrická?

2.4. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $S_C \subseteq S_A$? Musí platiť $S_C \subseteq S_B$? Musí platiť $S_A \subseteq S_C$, $S_B \subseteq S_C$? (Pripomeňme, že S_A je podpriestor generovaný riadkami matice A.)

2.5. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m\times n$ resp. $n\times k$. Dokážte, že $h(AB) \le h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.

2.6. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m\times n$ resp. $n\times k$. Dokážte, že $h(AB) \le h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

2.7. Nech $A, B \in M_{m,n}(F)$. Dokážte: Matice A, B sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď existuje regulárna matica $R \in M_{m,m}(F)$ taká, že $B = RA$.

3 Matica zobrazenia

3.1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
a) $f(1,1) = (0,1)$, $f(6,1) = (3,2)$
b) $f(2,3) = (1,0)$, $f(3,2) = (6,1)$

3.2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, pre ktoré platí:
a) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(3,1,2) = (1,-1,1,-1)$,
b) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (-1,1,-1,2)$,
c) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (1,-1,1,-1)$.

3.3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takého, že:
a) $f(1,2,3,3) = (0,0,0,0)$, $f(1,1,3,2) = (1,0,3,1)$, $f(1,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
b) $f(1,2,3,4) = (-1,-1,4,1)$, $f(1,1,3,2) = (1,0,3,1)$, $f(1,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
c) $f(0,1,1,1) = (1,0,0,0)$, $f(1,0,1,1) = (0,1,0,0)$, $f(1,1,0,1) = (0,0,1,0)$, $f(1,1,1,0) = (0,0,0,1)$

3.4. Koľko existuje lineárnych zobrazení spĺňajúcich zadané podmienky? Koľko z nich je injektívnych? Koľko je surjektívnych?
a) $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^4$, $f(1,3,1) = (1,1,1,3)$, $f(2,1,3) = (0,1,3,4)$, $f(2,1,0) = (1,4,0,0)$;
b) $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$, $f(1,0,3,1) = (0,1,3)$, $f(2,1,3,1) = (1,1,3)$, $f(1,1,4,1) = (2,2,1)$;
c) $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$, $f(1,0,3,1) = (0,1,3)$, $f(2,1,3,1) = (1,1,3)$, $f(1,1,0,0) = (1,0,0)$;

4 Jadro a obraz

4.1. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?
$\begin{pmatrix} 3&1&2&2\\ 4&3&2&1\\ 0&1&2&4\\ 2&0&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2&4&1&1\\ 3&3&3&2\\ 1&4&2&1\\ 4&2&0&3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4\\ 2&3&1&4\\ 4&3&2&1\\ 3&4&1&2 \end{pmatrix}$

4.2. Nájdite bázu a dimenziu $\operatorname{Ker} f$ aj $\operatorname{Im} f$ pre dané lineárne zobrazenie. Rozhodnite, či toto zobrazenie je injektívne, surjektívne, bijektívne.
a) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2+x_3+x_4, 2x_2+x_3+x_4, 4x_2+2x_3+2x_4)$.
b) $f\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f\colon \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & b+c\\ c+d & d+a \end{pmatrix}$
c) $f\colon V \to V$, kde $V = \{ax^2+bx+c; a,b,c \in \mathbb{R}\}$ je podpriestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $f\colon p(x) \mapsto p'(x)$. (T.j. f priradí polynómu $p(x)$ jeho deriváciu.)

4.3. Definujme lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1+x_2+2x_3-x_4, 2x_1+4x_2+x_3-x_4)$ a označme $U_1 = \operatorname{Ker} f$.
Ďalej definujme lineárne zobrazenie $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ako $g(y_1,y_2) = (y_1-y_2, y_1-3y_2, 2y_1-8y_2, 3y_1-27y_2)$ a označme $U_2 = \operatorname{Im} g$.
Vidíme, že U_1 aj U_2 sú podpriestory $\mathbb{R}^4$.
Nájdite bázy priestorov U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ a $U_1 + U_2$.

4.4. Nech $f\colon V \to V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označovať $f \circ f$. Dokážte

(a) $\operatorname{Ker} f^2 \supseteq \operatorname{Ker} f$,

(b) $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$,

(c) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \supseteq \operatorname{Im} f$.

4.5. Nájdite $\operatorname{Ker} T_A$, $\operatorname{Im} T_A$, kde $T_A\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ je dané predpisom

$$T_A(X) = AX - XA$$

pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, t.j.,

$$T_A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.6. Nech A je ľubovoľná matica typu $n \times n$ nad poľom F. Označme $T_A(X) = AX - XA$.
a) Ukážte, že $T_A\colon M_{n,n}(F) \to M_{n,n}(F)$ je lineárne zobrazenie.
b) Je T_A injektívne?
c) Je T_A surjektívne?

5 Inverzná matica

5.1. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad $\mathbb{R}$:
$\begin{pmatrix} 2&3&1 \\ 4&3&3 \\ 1&2&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&3&1 \\ 2&4&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&3&1 \\ 2&0&3 \\ 1&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&0&1 \\ 0&3&2 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 2&-1&3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&2&1 \\ 4&2&1 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&\sqrt{2}&\sqrt{6} \\ 0&1&\sqrt{3} \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ Výsledky:
$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{10} \\ -1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&5&-9 \\ 1&1&-2 \\ -2&-3&6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1 \\ -\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \\ 1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \\ -1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1&1&0 \\ \frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2} \\ 1&-1&-1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&-\sqrt{2}&0 \\ 0&1&-\sqrt{3} \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$

5.2. Nech $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1,2,3,1) = (2,0,1,0)$, $f(0,2,3,1) = (1,2,0,3)$, $f(1,0,3,4) = (3,2,1,0)$, $f(4,1,3,2) = (2,3,1,1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1}.

5.3. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 1&0&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad $\mathbb{Z}_2$ b) nad $\mathbb{Z}_3$, ak áno, nájdite inverznú.

5.4. Zistite pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ existuje A^{-1}. Pre tieto hodnoty aj vyjadrite, čomu sa A^{-1} rovná.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

5.5. Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobiť bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1}.
$A = \begin{pmatrix} 0&3&1 \\ 2&0&3 \\ 1&1&2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1&2&1 \\ 0&1&-1 \\ 0&-1&2 \end{pmatrix}$
Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).

5.6. Zistite, či pre dané matice A, B nad poľom $\mathbb{Z}_5$ existuje matica X nad tým istým poľom taká, že $AX = B$. Zistite, či je X maticami A, B jednoznačne určená. Ak taká matica existuje, tak aspoň jednu takú maticu nájdite.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.7*. Ukážte, že ak A je horná trojuholníková matica rozmerov $n \times n$, ktorá je regulárna, tak aj A^{-1} je horná trojuholníková. (Pod pojmom horná trojuholníková matica sa rozumie to, že pod diagonálou sú nuly. T.j. $a_{ij} = 0$ pre $i < j$.)

6 Opäť sústavy

6.1. Ukážte, že každý podpriestor R^n je množina riešení nejakej sústavy lineárnych rovníc nad poľom R. (LAG1 - 5.2.8(1))

6.2. Nájdite nejakú homogénnu sústavu rovníc so 4 neznámymi nad $\mathbb{R}$, ktorej riešením je daný podpriestor:
a) $S = [(1, 4, 0, 1), (1, 0, 3, -3), (0, 2, 0, 1)]$
b) $S = [(1, -1, 1, -2), (1, 1, 0, -1), (3, 1, 1, -4)]$

6.3. Pre dané podpriestory S, T priestoru V nájdite bázu a dimenziu $S \cap T$. Viete zistiť aj čomu sa rovná dimenzia $S + T$?
a) $S = [(2, 0, 3, 1), (1, -1, 0, 0)]$, $T = [(1, -1, -1, 0), (0, 2, 4, 1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$
b) $S = [(1, 0, 1, -2), (1, 1, -1, 3)]$, $T = [(1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 1), (2, -1, -1, 1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$
c) $S = [(1, 1, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 3, -2), (1, 0, 1, 0, 0)]$ a $T = [(1, 1, 0, 0, 3), (1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, -1, 0)]$ vo $V = \mathbb{R}^5$
Výsledky: a) $\dim(S) = \dim(T) = 2$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S + T) = 3$; b) $\dim(S) = 2$, $\dim(T) = 3$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S + T) = 4$; c) $\dim(S) = 3$, $\dim(T) = 3$, $\sim (S \cap T) = 1$, $\dim(S + T) = 5$