1 Všeobecné a parametrické vyjadrenie

1.1. [HZK, Príklad 2.3.21] Nájdite všeobecnú rovnicu nadroviny α v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (2, 2, 4, 4)$ a vektormi $\vec{a} = (0, 1, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 1, 0)$.

1.2. Pre afinný podpriestor zadaný parametricky nájdite jeho všeobecné vyjadrenie.
a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = 1 + s, x_2 = 2 + 2s + t, x_3 = 1 + s + t, x_4 = 1 + s - t; s, t \in \mathbb{R}\}$
b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + t, x_3 = 1 - t, x_4 = 3 + 3t; t \in \mathbb{R}\}$
c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = 1+s+t, x_2 = -1+s, x_3 = 1+3s+t, x_4 = -1+3s+2t; s, t \in \mathbb{R}\}$
d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = 1+s+2t, x_2 = 1+3s+t, x_3 = 1+4x+3t, x_4 = 2s-t; s, t \in \mathbb{R}\}$

Vzájomné polohy afinných podpriestorov

Rovnobežné: $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$ alebo $V(\beta) \subseteq V(\alpha)$
Rôznobežné: $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) \neq \emptyset$ a súčasne $\mathcal{B}(\alpha) \nsubseteq \mathcal{B}(\beta)$ a $\mathcal{B}(\beta) \nsubseteq \mathcal{B}(\alpha)$
Mimobežné: $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) = \emptyset$, $V(\alpha) \cap V(\beta) = \{\vec{0}\}$

1.1. [HZK, 2.4.53] Zistiť vzájomnú polohu daných afinných podpriestorov v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$:

a) $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = 3 + u + v \\ x_2 = 4 + u + v \\ x_3 = 5 + u + v \\ x_4 = 5 + u \end{cases} \qquad \beta \equiv \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 + v \\ x_3 = 5 + u + v \\ x_4 = 6 + u + v \end{cases}$

b) $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = 3 + 2u \\ x_2 = 3 + 2u \\ x_3 = 3 + 2u \\ x_4 = 2 + u + v \end{cases} \qquad \beta \equiv \begin{cases} x_1 = 2 + u + v \\ x_2 = 2 + u + v \\ x_3 = 3 + 2u \\ x_4 = 2 + u - v \end{cases}$

1.2. Dokážte, že priamka $p \equiv \{x_1 = 0; x_2 = t; x_3 = 1+t; x_4 = 1+t\}$ je mimobežná s rovinou $\alpha \equiv \{x_1 = u + v; x_2 = u + v; x_3 = u; x_4 = u - v\}$.

1.3. [HZK, 2.4.56] Určte vzájomnú polohu priamky

$$p \equiv \{x_1+2x_2+3x_3+x_4-3 = 0; x_1+4x_2+5x_3+2x_2-2 = 0; 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4-7 = 0\}$$

a nadroviny $\alpha \equiv 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_2 - 20 = 0$.

1.4. [HZK, 2.4.58] Určte parametrické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza bodom $A = (1, 0, 2, -1)$, je rovnobežná s rovinou

$$\alpha \equiv \{x_1 = u; x_2 = v; x_3 = u; x_4 = v\}$$

a pretína rovinu

$$\beta \equiv \{x_1 = u; x_2 = u + v; x_3 = -u; x_4 = 1 - v\}.$$

1.5. [HZK, 2.4.55] Vyšetrite vzájomnú polohu α a β pre

$$\alpha \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = 1; x_2 = -1 + w; x_3 = 1 + u + w; x_4 = -1 + v + w; x_5 = 1 + u + v + w; u, v, w \in \mathbb{R}$$
$$\beta \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5; x_4 - x_5 + 2 = 0\}$$

a určte parametrické vyjadrenie ich prieniku.

1.6. [HZK, 2.4.55] Ukážte, že priamka $p \equiv \{x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + 2t, x_3 = 3 + 3t, x_4 = 4 + 4t\}$ a rovina $\alpha \equiv \{x_1 + x_2 = 0; x_3 - x_4 - 1 = 0\}$ nemajú spoločný ani jeden bod a určte parametrické i analytické vyjadrenie afinného podpriestoru minimálnej dimenzie, ktorá obsahuje α a je rovnobežná s priamkou p.

1.7. Ukážte, že afinné podpriestory $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 + t + 2s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 - t - 2s \end{cases}$ $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 - u + 2v \\ x_3 = 2 + u - 2v \\ x_4 = 1 - u + 2v \end{cases}$ nie sú ani rovnobežné, ani rôznobežné, ani mimobežné.

1.8. Aká je vzájomná poloha afinných podpriestorov α, β? Nájdite najmenší afinný podpriestor obsahujúci α aj β. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = v \\ x_3 = 1 + u + v \\ x_4 = 2 - u \\ x_5 = -1 + v \end{cases}$ $\beta \equiv \begin{cases} x_1 = 2v \\ x_2 = u + 2v \\ x_3 = 2 + u + 3v \\ x_4 = 3 - v \\ x_5 = -1 + 2u + 3v \end{cases}$

1.9. Nech $(\mathcal{B}_{1,2}, V_{1,2})$ sú afinné podpriestory $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ také, že $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$. Vieme na základe tohoto faktu povedať niečo o ich vzájomnej polohe?

Literatúra

[HZK] Milan Hejný, Valent Zaťko, and Pavel Kršňák. *Geometria 1.* SPN, Bratislava, 1985.