

## 1 Vzdialenosť afinných podpriestorov

- 1.1. [P, 1376] Ukážte, že vzdialenosť medzi dvoma afinnými podpriestormi  $P_1 = A_1 + V_1$  a  $P_2 = A_2 + V_2$  sa rovná dĺžke ortogonálnej projekcie vektora  $\overrightarrow{A_1A_2}$  do priestoru  $V^\perp$ , kde  $V = V_1 + V_2$ .
- 1.2. Ukážte, že vzdialenosť medzi dvoma afinnými priestormi  $P_1 = A_1 + V_1$  a  $P_2 = A_2 + V_2$  sa rovná vzdialenosti bodu  $P_1$  od afinného podpriestoru  $P_2 + V$ , kde  $V = V_1 + V_2$ .
- 1.3. [BPC, 34.21] Nájdite vzdialenosť bodu  $A$  od priamky  $l$ :
- $A = (0, 3, 2, -5)$ ,  $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 1 + t, x_2 = -t, x_3 = 2 + 2t, x_4 = -2 + 2t\}$ ;
  - $A = (2, -2, 1, 5)$ ,  $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 3 + t, x_2 = -1 + t, x_3 = 2 + t, x_4 = -t\}$ ;
  - $A = (3, 3, 1, 0, 0)$ ,  $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5; x_1 = 2 + 3t, x_2 = 1 + 2t, x_3 = -t, x_4 = 1 + t, x_5 = -1 - t\}$ ;
  - $A = (1, -1, -1, 1)$ ,  $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 = 0, 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 0\}$ .
- [Výsledky: a) 3; b)  $2\sqrt{3}$ ; c) 4; d)  $\sqrt{6}$ .]
- 1.4. [BPC, 34.23] Nájdite vzdialenosť medzi priamkami  $l_1$  a  $l_2$ :
- $l_1: x_1 = 1 + t, x_2 = -1, x_3 = -t, x_4 = -2 + t$ ;  $l_2: x_1 = 4 + t, x_2 = 2t, x_3 = 1 + t, x_4 = t$
  - $l_1 = \{(2 + t, -1 - 2t, 2 + 2t, 1 - t); t \in \mathbb{R}\}$ ;  $l_2 = \{(3 - t, 1 + 2t, -1 - 2t, 2 + t); t \in \mathbb{R}\}$ ;
  - $l_1 = \{(3 + t, 2, t, 3 + t, -t); t \in \mathbb{R}\}$ ;  $l_2 = \{(1 + 2t, 2t, 1 - t, t, 2); t \in \mathbb{R}\}$ ;
  - $l_1 = \{(1 + t, 2t, 1 - t, -1 + t, t); t \in \mathbb{R}\}$ ;  $l_2 = \{(3 + t, -2t, -1 - t, 1 + t, 2 + t); t \in \mathbb{R}\}$ ;
  - $l_1 = \{(1 - 2t, 0, t, 1 + t, 2); t \in \mathbb{R}\}$ ;  $l_2 = \{(-1 + t, -1 + t, 0, 1, -2 - t); t \in \mathbb{R}\}$ ;
- [Výsledky: a)  $\sqrt{3}$ , b)  $\sqrt{5}$ ; c) 2; d)  $2\sqrt{2}$ ; e) 4]
- 1.5. Vypočítajte vzdialenosť bodu  $A = (0, 2, 1, 0)$  od roviny  $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = 1 - v \\ x_3 = 1 - u \\ x_4 = v \end{cases}$  a jeho kolmý priemet. [Výsledok:  $A^\perp = (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$ ]
- 1.6. Nájdite priamku  $q$ , ktorá je rovnobežná s priamkou  $p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 3x_1 + 4x_2 - 1 = 0\}$ , a platí pre ňu  $\rho(S, q) = 1$ , kde  $S = (2, 1)$ .
- 1.7. Nech  $p = \{(x_1, x_2); x_1 = -1 + t, x_2 = 3 - t, t \in \mathbb{R}\}$ ,  $\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 7x_1 + x_2 = 0\}$ ,  $\beta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 - x_2 + 8 = 0\}$ . Nájdite bod  $P \in p$  taký, že  $\rho(P, \alpha) = \rho(P, \beta)$ . [Výsledok:  $P = (-3, 5)$ ,  $P = (-1, 3)$ ]
- 1.8.  $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = 3u + v \\ x_2 = 1 + 2u + v \\ x_3 = -4u - 2v \\ x_4 = 2 + u + v \end{cases}$   $\beta \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 1 = 0 \end{cases}$   $\rho(\alpha, \beta) = ?$  [Výsledok:  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ]
- 1.9. Zistite vzdialenosť afinných podpriestorov  $p = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = t, x_2 = 1 + t, x_3 = t, x_4 = -t, x_5 = t, t \in \mathbb{R}\}$  a  $\beta = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = v, x_2 = u, x_3 = -u, x_4 = v, x_5 = -u, u, v \in \mathbb{R}\}$ . [Výsledok:  $\frac{\sqrt{14}}{7}$ ]
- 1.10. [S, 1375] Nájsť vzdialenosť medzi priamkou  $l$  a rovinou  $P$  ak:
- $l = (9, -2, -1, -1) + [(2, -2, -1, -1)]$ ;  $P = (2, 1, 3, -3) + [(3, -2, 2, 0), (-5, 2, 0, 2)]$ ;
  - $l = (2, 4, 0, 14) + [(0, 1, -2, 5)]$ ;  $P = (4, 1, -2, 5) + [(-1, 1, -1, 5), (1, 1, -3, 3)]$ .
- [Výsledky: a)  $\frac{27}{5}$ ; b)  $\sqrt{6}$ ]
- 1.11. [S, 1376] Nájdite vzdialenosť medzi priamkou  $l$  a rovinou  $P$ , ak:
- $l = (9, -2, -1, -1) + [(2, -2, -1, -1)]$ ;  $P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; 2x + 4y + z + t =$

$$8, 2x + 7y + 4z - 2t = 29\};$$

$$\text{b) } l = (2, -3, 1, -4) + [(-1, 2, 1, 1)]; P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + 12t = 19, 5x + 2y - 7z - 6t = -7\};$$

$$\text{c) } l = (2, 4, 0, 14) + [(0, 1, -2, 5)]; P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; 2x - 2y + z + t = 9, 4x + 2y + 3z + t = 17\};$$

Výsledky: a)  $27/5$ , b)  $\sqrt{13}$ , c)  $\sqrt{6}$

1.12. [P, 1377] Nájdite vzdialenosť dvoch rovín v  $\mathbb{R}^4$  ak jedna z nich je určená bodom  $X = (4, 5, 3, 2)$  a vektormi  $\vec{a} = (1, 2, 2, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, -2, 1, 2)$ , druhá je určená bodom  $Y = (1, -2, 1, -3)$  a vektormi  $\vec{c} = (2, 0, 2, 1)$ ,  $\vec{d} = (1, -2, 0, -1)$ .

1.13. Nájdite vzdialenosť zadaných afinných podpriestorov  $\mathbb{R}^4$ :

$$\text{a) priamka } p = \{(2 + t, 1 + t, 2 + 2t, -2); t \in \mathbb{R}\} \text{ a rovina } \alpha = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2\} \text{ v } \mathbb{R}^4;$$

## 2 Uhly, kolmost'

$$2.1. \text{ Nech } A = (7, -4, -1, 2) \text{ a } \alpha \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{Nájdite } A^\perp. \text{ [Výsledok: } A^\perp = (5, -5, -2, -1)]$$

$$2.2. \alpha \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0 \end{cases} \quad p \equiv \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 + 2t \end{cases}$$

Nájdite priamku  $q$  takú, že  $(0, 0, 0, 0) \in q$ ,  $q \perp p$  a  $q \perp \alpha$ . [Výsledok:  $q = \{(11u, 3u, -4u, 4u); u \in \mathbb{R}\}$ ]

$$2.3. \text{ Nech } P = (1, -1, 2, 1)$$

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2 = 0 \end{cases} \quad \beta \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 + u + v \\ x_3 = -u \\ x_4 = 1 - v \end{cases}$$

Nájdite priamku  $p$  takú, že  $P \in p$ ,  $p \perp \alpha$  a  $p$  pretína  $\beta$ .

$$2.4. \alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 + v \\ x_3 = v \\ x_4 = v \\ x_5 = u \end{cases} \quad \beta \equiv \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - 1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{Nájdite rovinu } \gamma \text{ takú, že } \gamma \supseteq \alpha \text{ a}$$

$\gamma \perp \beta$ . (Akú dimenziu môže mať afinný podpriestor  $\gamma$ , ak má splňať tieto 2 podmienky?)

## Literatúra

[BPC] L. A. Beklemisheva, A. Yu. Petrovich, and I. A. Chubarov. *Sborník zadach po analiticheskoj geometrii i lineinoi algebre*. Fizmatlit, 2004.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sborník zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.

- [S] Yu. M. Smirnov. *Sbornik zadach po analiticheskoj geometrii i linejnoj algebre*. Golos, Moskva, 2005.