1 Kvadratické formy

1.1. Nájdite kanonický tvar danej kvadratickej formy a transformáciu premenných, ktorá ju prevedie na kanonický tvar.
a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$
b) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$
c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
d) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$
e) $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$
f) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$
g) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$
h) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$
i)
$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2.$$

Riešenia: a), b), f), h) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; c) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$, d) $y_1^2-y_2^2$; e) $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$; g) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ (Transformáciu premenných som sem nedával – tá nie je určená jednoznačne.)

1.2*. [FS, 528] Preveďte kvadratickú formu $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1\le i<k\le n} x_ix_k$ na diagonálny tvar.

[Výsledok: $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac12 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac12 & \frac13 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 & \dots & \frac1n & 1 \end{pmatrix}$]

(Toto samozrejme nie je jediná možnosť.)

1.3*. [FS, 529] Preveďte kvadratickú formu $\sum\limits_{1\le i<k\le n} x_ix_k$ na diagonálny tvar.

1.4. Zistite, či predpis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$ predstavuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$.
a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1.5. Pre aké hodnoty parametra a je daná kvadratická forma kladne definitná.
a) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$
b) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
c) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$
d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.
Odpovede: a) $|a| < \sqrt{\frac{5}{3}}$, b) $-\frac{4}{5} < a < 0$, c), d) pre žiadne a

1.6. Pre danú kvadratickú formu určte tie hodnoty parametra $t \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kladne definitná.
a) $5x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - 2x_2x_3$
b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$
c) $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - 3tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3 + 2x_1x_3$
d) $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + t(6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1^2) + t^2(x_1^2 + x_2^2)$
(Poznámka: Niekedy sa výpočet determinantov $D_1, D_2, \dots$ môže zjednodušiť, ak zmeníte poradie premenných. Takáto zmena neovplyvní to, či je matica kladne definitná.)

1.7. Nech A je symetrická reálna matica taká, že $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$. (Determinanty $D_1, \dots, D_n$ označujú rohové determinanty vystupujúce v Sylvestrovom kritériu.) Dokážte, že potom $a_{nn} > 0$.

1.8. Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Definujme maticu $A = \|a_{ij}\|$ tak, že $a_{ij} = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle$. (Táto matica sa zvykne volať *Gramova matica.*) Dokážte, že $|A| \geq 0$ a že tieto vektory sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $|A| > 0$.

1.9. [P, 1201,1202] Pre ktoré z uvedených kvadratických foriem existuje regulárna transformácia premenných, ktorá prevedie jednu z nich na druhú?

a) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$; $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$; $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;

b) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$; $f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$; $f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$

1.10. Z údajov ktoré sú zadané o reálnej symetrickej matici A zistite, ako vyzerá kanonický tvar príslušnej kvadratickej formy. (Dali by sa tieto úvahy použiť na zistenie kanonického tvaru pre niektoré kvadratické formy z predošlých príkladov?)

a) Matica A je *kladne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.

b) Matica A je *záporne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.

c) A je nenulová symetrická matica rozmerov 3×3, ktorá má nulovú stopu aj determinant, t.j. $\det(A) = \mathrm{Tr}(A) = 0$.

1.11. Pre danú symetrickú maticu A nájdite diagonálnu maticu D a *ortogonálnu* maticu P také, že platí $PAP^T = D$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;
i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

Výsledky: a) $\mathrm{diag}(0, 4, 10)$; b) $\mathrm{diag}(-1, -1, 2)$; c) $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$; d) $\mathrm{diag}(-1, -1, 5)$; e) $\mathrm{diag}(0, 0, 6)$; f) $\mathrm{diag}(-3, -3, 3)$; g) $\mathrm{diag}(-1, -1, 5)$; h) $\mathrm{diag}(0, 5, 12)$; i) $\mathrm{diag}(-3, -4, 6)$;

1.12. Nájdite (ak taká matica existuje) ortogonálnu maticu P takú, že $PAP^T = D$ je diagonálna matica.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2 Nerovnosti*

2.1. Nájdite maximálnu a minimálnu hodnotu danej funkcie na množine M. (Prípadne sa môžete pokúsiť nájsť aj v akom bode sa maximum a minimum nadobúda.)
a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$; $M = \mathbb{R}^2$
b) $f(x,y) = xy$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
c) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
d) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
e) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
f) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ (Hint: Táto úloha sa dá riešiť pomocou kvadratických foriem. Možno však kratšie riešenie nájdete použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti alebo niektorých iných nerovností, ktoré už poznáte.)
g) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$;
h) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 1\}$;

Literatúra

[FS] D. K. Faddeev and I. C. Sominskii. *Zadači po vysšej algebre.* Laň, St. Peterburg, 1999.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.