Duálny priestor

Duálny priestor k V je priestor V^* všetkých lineárnych zobrazení z V do R.

Báza duálneho priestoru. Ak máme bázu $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ priestoru V, tak za bázu duálneho priestoru V^* môžeme zobrať lineárne zobrazenia $b_1^*, \dots, b_k^*$ jednoznačne určené podmienkami

$$b_i^*(\vec{b}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j, \\ 0 & \text{ak } i \neq j. \end{cases}$$

Kanonický izomorfizmus. Zobrazenie $\epsilon_V \colon V \to V^{**}$ určené ako „evualuácia", t.j. pre $\varphi \in V^*$ je

$$\epsilon_V(\varphi) = \varphi(\vec{v}),$$

je izomorfizmus medzi V a V^{**}. (Ak V je konečnorozmerný priestor.)

Duálne zobrazenie: Pre lineárne zobrazenie $f \colon V \to W$ je $f^* \colon W^* \to V^*$ je určené predpisom $f^* \colon \varphi \mapsto \varphi \circ f$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "?"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Ak f má maticu A vzhľadom na bázy $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$, tak f^* má vzhľadom na duálne bázy $w_1^*, \dots, w_k^*$, $v_1^*, \dots, v_n^*$ maticu A^T.

1. Nech V, W, U sú vektorové priestory nad poľom R. Dokážte nasledujúce tvrdenia:
   a) Ak $f, g \colon V \to W$ sú lineárne zobrazenia, tak $(f+g)^* = f^* + g^*$.
   b) Ak $f \colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a $c \in R$, tak $(cf)^* = cf^*$.
   c) Ak $f \colon V \to W$ a $g \colon W \to U$ sú lineárne zobrazenia, tak $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
   d) Pre $id_V \colon V \to V$ platí $(id_V)^* = id_{V^*}$.
   e) Ak $0 \colon V \to W$ označuje nulové zobrazenie, tak $0^* \colon W^* \to V^*$ je tiež nulové zobrazenie.
   f) Ak $f \colon V \to W$ je lineárne zobrazenie, tak platí

   $$f^{**} \circ \epsilon_V = \epsilon_W \circ f.$$

   Táto rovnosť vlastne hovorí, že ak priestor stotožníme s jeho druhým duálom prostredníctvom kanonického izomorfizmu ϵ_V resp. ϵ_W, tak zobrazenie f je „to isté" ako zobrazenie f.

   $$\begin{tikzcd} V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**} \\ V \arrow[u, "\epsilon_V"] \arrow[r, "f"'] & W \arrow[u, "\epsilon_W"'] \end{tikzcd}$$

   g) Nech navyše V je konečnorozmerný a má bázu $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Vieme potom, že $v_1^*, \dots, v_n^*$ tvorí bázu priestoru V^* a $v_1^{**}, \dots, v_n^{**}$ tvorí bázu priestoru V^{**}. Ukážte, že

   $$\epsilon_V(\vec{v}_i) = v_i^{**}.$$

   Toto tvrdenie vlastne hovorí, že kanonický izomorfizmus medzi V a V^{**} je presne lineárne zobrazenie jednoznačne určené tým, že $v_i \mapsto v_i^{**}$.
   h) Vedeli by ste napísať, akým maticovým rovnostiam týkajúcim sa transponovanej matice zodpovedajú niektoré z tvrdení, ktoré sme tu uviedli? Vedeli by ste pomocou tvrdenia g) zdôvodniť tvrdenie f) jednoduchším spôsobom v konečnorozmernom prípade?

2. Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie medzi konečnorozmernými priestormi. Dokážte, že:
   a) f je injektívne $\Leftrightarrow$ f^* je surjektívne.
   b) f je surjektívne $\Leftrightarrow$ f^* je injektívne.
   Vedeli by ste dokázať tieto tvrdenia aj bez použitia matice zobrazenia priamo z definície duálneho zobrazenia? Skúste sa pritom zamyslieť aj nad tým, na ktorých miestach využívame to, že V a W sú konečnorozmerné.

Súčasná diagonalizácia*

1. Nech pre matice A, B existuje regulárna matica P taká, že $PAP^{-1} = D_1$ aj $PAP^{-1} = D_2$ sú diagonálne matice. Ukážte, že $AB = BA$, t.j. matice A, B komutujú.

2*. Zistite, či pre dané matice A, B existuje regulárna matica P taká, že PAP^{-1} aj PBP^{-1} sú diagonálne:
   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$