Skalárny súčin

Skalárny súčin definujeme iba pre vektorové priestory nad $\mathbb{R}$. Je to zobrazenie $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$ také, že:

(i) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=\langle\vec{\beta},\vec{\alpha}\rangle$,

(ii) $\langle\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma}\rangle=\langle\vec{\alpha},\vec{\gamma}\rangle+\langle\vec{\beta},\vec{\gamma}\rangle$,

(iii) $\langle c\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=c\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle$,

(iv) ak $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, tak $\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle>0$.

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle}$$

(a) $|\vec{\alpha}|\geq 0$

(b) $|\vec{\alpha}|=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{0}$

(c) $|c\vec{\alpha}|=|c||\vec{\alpha}|$

(d) $|\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle|\leq|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (Schwarzova nerovnosť)

(e) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ (trojuholníková nerovnosť)

Štandardný skalárny súčin v $\mathbb{R}^n$:

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

Kolmé (ortogonálne) vektory: $\vec{x}\perp\vec{y}\Leftrightarrow\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$

Každý konečnorozmerný euklidovský priestor má ortonormálnu bázu (t.j. bázu pozostávajúcu z vektorov, ktoré majú veľkosť 1 a sú na seba kolmé.)

Ortogonálny doplnok:

$$M^{\perp}=\{\vec{x}\in V;(\forall\vec{m}\in M)\vec{x}\perp\vec{m}\}$$

Ak S je podpriestor **konečnorozmerného** priestoru V, tak:

$$S\oplus S^{\perp}=V$$
$$\dim(S)+\dim(S^{\perp})=\dim(V)$$
$$(S^{\perp})^{\perp}=S$$

Rovnosť $S\oplus S^{\perp}$ znamená, že každý vektor sa dá jednoznačne vyjadriť ako súčet vektora z S a vektora z $S^{\perp}$:

$$\vec{x}=\vec{x}_S+\vec{x}_{S^{\perp}}.$$

Priradenie

$$P\colon\vec{x}\mapsto\vec{x}_S$$

je lineárne zobrazenie, ktoré sa nazýva ortogonálna projekcia do podpriestoru S. Ak pracujeme so štandardným skalárnym súčinom, tak matica zobrazenia P je symetrická.

Ak $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_k$ tvoria ortonormálnu bázu podpriestoru S, tak

$$P(\vec{x})=\langle\vec{x},\vec{u_1}\rangle\vec{u}_1+\langle\vec{x},\vec{u_2}\rangle\vec{u}_2+\cdots+\langle\vec{x},\vec{u_k}\rangle\vec{u}_k.$$

Pre štandardný skalárny súčin dostaneme $P(\vec{x})=\sum\limits_{i=1}^{k}\vec{x}\vec{u}_2^T\vec{u}_2=\vec{x}\sum\limits_{i=1}^{k}\vec{u}_i^T\vec{u}_i$, čiže matica projekcie je

$$\vec{u}_1^T\vec{u}_1+\vec{u}_2^T\vec{u}_2+\cdots+\vec{u}_k^T\vec{u}_k.$$