

## Domáca úloha č. 13

Zverejnená 18.3.2020 - termín odovzdania bude určený dodatočne.

Táto d.ú. je za 6 bodov.

Dané množiny usporiadajte podľa kardinality. Svoje tvrdenia zdôvodnite! (T.j. očakáva sa napríklad odpoveď v tvare napríklad  $|A| < |C| = |D| < |B|$  a zdôvodnenie všetkých uvedených nerovností a rovností.)

- (a)  $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $C = \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ ,  $D =$  množina všetkých spojitých zobrazení  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (b)  $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ ,  $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $C = \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ ,  $D =$  množina všetkých spojitých zobrazení  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (c)  $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$ ,  $B = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $C = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ,  $D =$  množina všetkých spojitých zobrazení  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností  $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$  a  $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ . (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovnosti  $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$ , ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín:  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$  a  $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$ .

Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Výsledok by mal byť upravený na niektoré z kardinálnych čísel  $\aleph_0$ ,  $\mathfrak{c}$ ,  $2^{\aleph_0}$ ,  $2^{2^{\aleph_0}}$ .

a: MČ, JG, KD, VM, , , , ,

b: SD, DČ, NK, , , , , ,

c: LJ, VI, LŽ, MV, , , , ,