

1 Vektorové priestory

$(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad R ak $+: V \times V \rightarrow V$, $\cdot: R \times V \rightarrow V$ a platí

- $(V, +)$ je komutatívna grupa;
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ pre ľubovoľné $\alpha \in R$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$;
- $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $1\vec{x} = \vec{x}$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in V$.

- 1.1. Ukážte, že \mathbb{R} je vektorový priestor nad poľom \mathbb{Q} .
- 1.2. Koľko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$?
- 1.3. Zistite, či $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami $+$ a \cdot definovanými tak, že $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $r \cdot (a, b) = (ra, 2rb)$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad \mathbb{R} .
- 1.4. Zistite, či $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor nad \mathbb{R} , ak definujeme $x \oplus y = xy$, $c \odot x = x^c$ pre $x, y \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$.

2 Podpriestory

Ak V je vektorový priestor nad poľom R a M je neprázdna podmnožina V , tak tieto podmienky sú ekvivalentné:

- M je podpriestor priestoru V .
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha \in R$ platí $\vec{x} + \vec{y} \in M$, $\alpha\vec{x} \in M$.
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha, \beta \in R$ platí $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in M$.

Ak M je podpriestor, tak $\vec{0} \in M$. (Každý podpriestor obsahuje nulový vektor.)

- 2.1. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru \mathbb{R}^3 ?
 - a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
 - b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
 - c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
 - d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
 - e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
 - f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
 - g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
 - h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
 - i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
 - j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
- 2.2. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
 - a) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$
 - b) nezáporné funkcie
 - c) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$
 - d) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťou $(\forall x \in (0, 1)) f(x) = f(1 - x)$
 - e) ohraničené funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - f) spojité funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - h) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že existuje konečná $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
 - i*) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že existuje konečná alebo nekonečná $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- 2.3. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F . Ukážte, že $S \cup T$ je podpriestor priestoru V práve vtedy, keď $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$.
- 2.4. Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \neq \emptyset$ je podmnožina V . Ukážte, že S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $c\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$.