

Systemy lineárnych rovníc

1. Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc nad polom \mathbb{R} :

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = & 1 & & x_1 + x_2 & = & 1 \\ & & x_2 & -x_3 & + & x_4 & = & -3 & & x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = & 1 & & x_2 + x_3 + x_4 & = & -3 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 3 & & x_3 + x_4 + x_5 & = & 2 \\ & & & & & & & x_4 + x_5 & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x & -5y & +3z & +t & = & 5 & & x & +2y & +4z & -3t & = & 0 \\ 3x & -7y & +3z & -t & = & -1 & & 3x & +5y & +6z & -4t & = & 0 \\ 5x & -9y & +6z & +2t & = & 7 & & 4x & +5y & -2z & +3t & = & 0 \\ 4x & -6y & +3z & +t & = & 8 & & 3x & +8y & +24z & -19t & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccrcr} x & +4y & -2z & +8t & = & 12 \\ & y & -7z & +2t & = & -4 \\ & & 5z & -t & = & 7 \\ & & & z & +3t & = & -5 \end{array}$$

2. Riešte v \mathbb{Z}_5 sústavu určenú maticou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & | & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & | & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & | & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & | & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & | & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & | & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

3. Riešte v \mathbb{R} sústavu určenú maticou:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 11 \\ 1 & 1 & -3 & | & 7 \\ 11 & -4 & -3 & | & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \\ 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ -1 & 3 & -2 & | & 3 \\ 0 & 5 & -5 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & | & 0 \\ 1 & -3 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie: a) nemá riešenie, b) $(1, 2, 3)$ c) $(t - \frac{3}{5}, t + \frac{4}{5}, t)$, d) $(\frac{20}{47}, \frac{6}{47}, -\frac{8}{47})$, e) $(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t)$

4. Riešte v \mathbb{Z}_7 sústavu určenú maticou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & | & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & | & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & | & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

5. Nájdite reálne čísla a, b, c tak, aby graf funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi $(1, 2)$, $(-1, 6)$ a $(2, 3)$.
6. Nájdite hodnotu parametra $b \in \mathbb{R}$, pre ktorú má daná sústava riešenie. Pre túto hodnotu aj vyjadrite množinu riešení.

$$\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 4 \end{array}$$

7. V závislosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ riešte systém daný maticou:

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & | & a^2 \\ 1 & a & | & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 1 & | & a^3 \\ 1 & a & | & 1 \end{pmatrix}$

8. Ako vyzerajú, v závislosti od parametra p , riešenia sústavy danej maticou:

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & p & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & p & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & p & | & 1 \end{pmatrix}$$

- 9*. O sústave n rovníc o n neznámych nad polom \mathbb{R} vieme, že jej koeficienty tvoria aritmetickú postupnosť (ako napríklad pre maticu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 5 & 6 & 7 & | & 8 \\ 9 & 10 & 11 & | & 12 \end{pmatrix}$) a že táto sústava má jediné riešenie. Nájdite riešenie sústavy.