

Ak  $A$  je typu  $m \times \boxed{n}$  a  $B$  je typu  $\boxed{n} \times k$ , tak súčin  $C = AB$  má rozmery  $m \times k$  a

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}.$$

Matica lineárneho zobrazenia  $f: R^k \rightarrow R^n$  je matica typu  $k \times n$  nad polom  $R$ , ktorej  $i$ -ty riadok je vektor  $f(\vec{e}_i)$ , t.j. obraz  $i$ -teho vektora zo štandardnej bázy.

Súčin matic a skladanie lineárnych zobrazení:

$$M_{g \circ f} = M_f \cdot M_g$$

Obraz vektora a súčin:

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot M_f$$

## 1 Lineárne zobrazenia

- 1.1. Nech  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad polom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie. Ak  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$  sú lineárne závislé vektory, tak aj  $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$  sú lineárne závislé vektory.
- 1.2. Nech  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru  $V$  do vektorového priestoru  $W$  nad polom  $F$ . Dokážte:
  - Ak  $S$  je podpriestor vektorového priestoru  $V$ , tak  $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$  je podpriestor vektorového priestoru  $W$ .
  - Ak  $T$  je podpriestor vektorového priestoru  $W$ , tak  $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$  je podpriestor vektorového priestoru  $V$ .

## 2 Súčin matic

- 2.1. Vypočítajte  $A^2 + 2AB + B^2$ ,  $A^2 + 2BA + B^2$ ,  $A^2 + AB + BA + B^2$ ,  $(A + B)^2$ , ak  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- 2.2. Vyrátajte  $EA$  a  $AE$  pre  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  a a)  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  b)  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  c)  $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  d)  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Vedeli by ste nájsť riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice  $A$  maticu  $EA$  resp.  $AE$ ? (Viac sa o súvisie násobenia matic a elementárnych riadkových/stĺpcových operácií môžete dozvedieť v LAG1 v časti 4.4).
- 2.3. Pre štvorcovú maticu  $C$  typu  $n \times n$  budeme výraz  $\text{Tr}(C) = \sum_{k=1}^n c_{kk}$  nazývať *stopa matice*  $C$ .
  - Ukážte, že ak  $A, B$  sú matice typu  $n \times n$  nad polom  $F$ , tak platia rovnosti  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A)^T$  a  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .
  - Zistite, či pre ľubovoľné matice  $A, B, C$  typu  $n \times n$  platia vzťahy  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CBA)$  a  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(ACB)$ . (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, matica  $A$  je symetrická?
- 2.4. Nech  $C = AB$ , kde  $A, B$  sú matice. Musí potom platiť  $S_C \subseteq S_A$ ? Musí platiť  $S_C \subseteq S_B$ ? Musí platiť  $S_A \subseteq S_C$ ,  $S_B \subseteq S_C$ ? (Pripomeňme, že  $S_A$  je podpriestor generovaný riadkami matice  $A$ .)
- 2.5. Nech  $A, B$  sú matice nad polom  $F$  typu  $m \times n$  resp.  $n \times k$ . Dokážte, že  $h(AB) \leq h(A)$ . Dokážte, že ak  $n = k$  a  $B$  je regulárna, tak  $h(AB) = h(A)$ .
- 2.6. Nech  $A, B$  sú matice nad polom  $F$  typu  $m \times n$  resp.  $n \times k$ . Dokážte, že  $h(AB) \leq h(B)$ . Dokážte, že ak  $m = n$  a  $A$  je regulárna, tak  $h(AB) = h(B)$ .

- 2.7. Nech  $A, B \in M_{m,n}(F)$ . Dokážte: Matice  $A, B$  sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď existuje regulárna matica  $R \in M_{m,m}(F)$  taká, že  $B = RA$ .

### 3 Matica zobrazenia

- 3.1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia  $f: (\mathbb{Z}_7)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^2$  a napíšte jeho predpis.  
 a)  $f(1, 1) = (0, 1)$ ,  $f(6, 1) = (3, 2)$   
 b)  $f(2, 3) = (1, 0)$ ,  $f(3, 2) = (6, 1)$
- 3.2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , pre ktoré platí:  
 a)  $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$ ,  $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$ ,  $f(3, 1, 2) = (1, -1, 1, -1)$ ,  
 b)  $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$ ,  $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$ ,  $f(2, -1, 4) = (-1, 1, -1, 2)$ ,  
 c)  $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$ ,  $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$ ,  $f(2, -1, 4) = (1, -1, 1, -1)$ .
- 3.3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  takého, že:  
 a)  $f(1, 2, 3, 3) = (0, 0, 0, 0)$ ,  $f(1, 1, 3, 2) = (1, 0, 3, 1)$ ,  $f(1, 1, 2, 0) = (2, 0, 1, 0)$ ,  $f(1, 0, 3, 1) = (2, 1, 3, 1)$   
 b)  $f(1, 2, 3, 4) = (-1, -1, 4, 1)$ ,  $f(1, 1, 3, 2) = (1, 0, 3, 1)$ ,  $f(1, 1, 2, 0) = (2, 0, 1, 0)$ ,  $f(1, 0, 3, 1) = (2, 1, 3, 1)$   
 c)  $f(0, 1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $f(1, 0, 1, 1) = (0, 1, 0, 0)$ ,  $f(1, 1, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$ ,  $f(1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$
- 3.4. Kolko existuje lineárnych zobrazení spĺňajúcich zadané podmienky? Kolko z nich je injektívnych? Kolko je surjektívnych?  
 a)  $f: \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^4$ ,  $f(1, 3, 1) = (1, 1, 1, 3)$ ,  $f(2, 1, 3) = (0, 1, 3, 4)$ ,  $f(2, 1, 0) = (1, 4, 0, 0)$ ;  
 b)  $f: \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ ,  $f(1, 0, 3, 1) = (0, 1, 3)$ ,  $f(2, 1, 3, 1) = (1, 1, 3)$ ,  $f(1, 1, 4, 1) = (2, 2, 1)$ ;  
 c)  $f: \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ ,  $f(1, 0, 3, 1) = (0, 1, 3)$ ,  $f(2, 1, 3, 1) = (1, 1, 3)$ ,  $f(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ ;

### 4 Jadro a obraz

- 4.1. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia  $f: (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$  s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?  

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- 4.2. Nájdite bázu a dimenziu  $\text{Ker } f$  aj  $\text{Im } f$  pre dané lineárne zobrazenie. Rozhodnite, či toto zobrazenie je injektívne, surjektívne, bijektívne.  
 a)  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_2 + x_3 + x_4, 4x_2 + 2x_3 + 2x_4)$ .  
 b)  $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ ,  $f: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix}$   
 c)  $f: V \rightarrow V$ , kde  $V = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$  je podpriestor  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  a  $f: p(x) \mapsto p'(x)$ . (T.j.  $f$  priradí polynómu  $p(x)$  jeho deriváciu.)
- 4.3. Definujme lineárne zobrazenie  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ako  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4)$  a označme  $U_1 = \text{Ker } f$ .  
 Ďalej definujme lineárne zobrazenie  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  ako  $g(y_1, y_2) = (y_1 - y_2, y_1 - 3y_2, 2y_1 - 8y_2, 3y_1 - 27y_2)$  a označme  $U_2 = \text{Im } g$ .  
 Vidíme, že  $U_1$  aj  $U_2$  sú podpriestory  $\mathbb{R}^4$ .  
 Nájdite bázy priestorov  $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$  a  $U_1 + U_2$ .
- 4.4. Nech  $f: V \rightarrow V$  je lineárne zobrazenie. Ako  $f^2$  budeme označovať  $f \circ f$ . Dokážte  
 (a)  $\text{Ker } f^2 \supseteq \text{Ker } f$ ,  
 (b)  $\text{Im } f^2 \subseteq \text{Im } f$ ,  
 (c)  $f^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } f \supseteq \text{Im } f$ .

4.5. Nájďte  $\text{Ker } T_A$ ,  $\text{Im } T_A$ , kde  $T_A: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$  je dané predpisom

$$T_A(X) = AX - XA$$

pre  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , t.j.,

$$T_A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.6. Nech  $A$  je ľubovoľná matica typu  $n \times n$  nad poľom  $F$ . Označme  $T_A(X) = AX - XA$ .

- Ukážte, že  $T_A: M_{n,n}(F) \rightarrow M_{n,n}(F)$  je lineárne zobrazenie.
- Je  $T_A$  injektívne?
- Je  $T_A$  surjektívne?

## 5 Inverzná matica

5.1. Nájďte inverznú maticu k daným maticiam nad  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Výsledky:}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2. Zistite, či je zadaná matica nad poľom  $\mathbb{Z}_5$  regulárna; ak áno, nájdite inverznú:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{Výsledky: } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3. Nech  $f: (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$  je lineárne zobrazenie také, že  $f(1, 2, 3, 1) = (2, 0, 1, 0)$ ,  $f(0, 2, 3, 1) = (1, 2, 0, 3)$ ,  $f(1, 0, 3, 4) = (3, 2, 1, 0)$ ,  $f(4, 1, 3, 2) = (2, 3, 1, 1)$ . Nájďte maticu zobrazenia  $f^{-1}$ .

5.4. Zistite, či  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  je regulárna a) nad  $\mathbb{Z}_2$  b) nad  $\mathbb{Z}_3$ , ak áno, nájdite inverznú.

5.5. Zistite pre aké hodnoty parametra  $a \in \mathbb{R}$  existuje  $A^{-1}$ . Pre tieto hodnoty aj vyjadrite, čomu sa  $A^{-1}$  rovná.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

5.6. Vypočítajte  $A^{-1}B$  a  $B^{-1}A$ . Skúste to urobiť bez výpočtu  $A^{-1}$  resp.  $B^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou  $A$  (resp.  $B$ ) dostanete maticu  $B$  (resp.  $A$ ).

5.7. Zistite, či pre dané matice  $A, B$  nad poľom  $\mathbb{Z}_5$  existuje matica  $X$  nad tým istým poľom taká, že  $AX = B$ . Zistite, či je  $X$  maticami  $A, B$  jednoznačne určená. Ak taká matica existuje, tak aspoň jednu takú maticu nájdite.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.8\*. Ukážte, že ak  $A$  je horná trojuholníková matica rozmerov  $n \times n$ , ktorá je regulárna, tak aj  $A^{-1}$  je horná trojuholníková. (Pod pojmom horná trojuholníková matica sa rozumie to, že pod diagonálou sú nuly. T.j.  $a_{ij} = 0$  pre  $i < j$ .)

## 6 Opäť sústavy

6.1. Ukážte, že každý podpriestor  $R^n$  je množina riešení nejakej sústavy lineárnych rovníc nad poľom  $R$ . (LAG1 - 5.2.8(1))

6.2. Nájdite nejakú homogénnu sústavu rovníc so 4 neznámymi nad  $\mathbb{R}$ , ktorej riešením je daný podpriestor:

$$\text{a) } S = [(1, 4, 0, 1), (1, 0, 3, -3), (0, 2, 0, 1)]$$

$$\text{b) } S = [(1, -1, 1, -2), (1, 1, 0, -1), (3, 1, 1, -4)]$$

6.3. Pre dané podpriestory  $S, T$  priestoru  $V$  nájdite bázu a dimenziu  $S \cap T$ . Viete zistiť aj čomu sa rovná dimenzia  $S + T$ ?

$$\text{a) } S = [(2, 0, 3, 1), (1, -1, 0, 0)], T = [(1, -1, -1, 0), (0, 2, 4, 1)] \text{ vo } V = \mathbb{R}^4$$

$$\text{b) } S = [(1, 0, 1, -2), (1, 1, -1, 3)], T = [(1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 1), (2, -1, -1, 1)] \text{ vo } V = \mathbb{R}^4$$

$$\text{c) } S = [(1, 1, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 3, -2), (1, 0, 1, 0, 0)] \text{ a } T = [(1, 1, 0, 0, 3), (1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, -1, 0)] \text{ vo } V = \mathbb{R}^5$$

Výsledky: a)  $\dim(S) = \dim(T) = 2, \dim(S \cap T) = 1, \dim(S + T) = 3$ ; b)  $\dim(S) = 2, \dim(T) = 3, \dim(S \cap T) = 1, \dim(S + T) = 4$ ; c)  $\dim(S) = 3, \dim(T) = 3, \dim(S \cap T) = 1, \dim(S + T) = 5$