1 Úprava algebraických výrazov

1.1. Upravte uvedený výrazy na čo najjednoduchší tvar:
a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;
b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;
c) $\sqrt{(-3)^2}$;
d) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$;

1.2. Zjednodušte zadané výrazy. Zistite aj, pre aké hodnoty premenných sú definované.
a) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;
b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$;
c) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;
d) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$; (Hint: Čo vychádza po dosadení čísla 1?)
e) $(x+y+z)^2$;
f) $(x+y+z)^3$;
g) $(x+y)(y+z)(x+z)$;
h) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$;
i) $\dfrac{x^4-y^4}{x-y}$;
j) $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$;
h) $(\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2})(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})$;
i) $\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}$;
j) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$;
k) $\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2(n+2)}$.

1.3. Čomu sa rovná x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$, $x_1^2-x_1$ a $x_1^2-x_2^2$ pre

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

(Číslo $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vystupujúce v tejto úlohe sa volá *zlatý rez* a dá sa s ním stretnúť v rôznych oblastiach.[1])

1.4. Zistite, či platí uvedená rovnosť pre ľubovoľné reálne čísla, pre ktoré má daný výraz zmysel. (Ak platí, tak sa ju pokúste zdôvodniť. Ak nie, tak nájdite aspoň jeden *konkrétny* kontrapríklad.)
a) $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;
b) $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$;
c) $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$;
d) $\sqrt{a^2}=a$;
e) $(\sqrt{a})^2=a$;
f) $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;
g) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

2 Sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+y+2z&=0\\ 2x+y+z&=1 \end{aligned}$$

Maticový zápis tejto sústavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Zápis ako súčin matice a stĺpcového vektora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x+y&=3\\ 3x-2y&=-1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2\\ 2x+y+z&=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2\\ 2x+3y&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2\\ 2x+3y&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2\\ 2x+3y&=2 \end{aligned}$$

3 Celé čísla, deliteľnosť, indukcia

3.1. Dokážte matematickou indukciou, že súčin troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný šiestimi.
3.2. Dokážte, že súčet tretích mocnín troch po sebe idúcich čísel je deliteľný 9.
3.3. Dokážte tvrdenie: Číslo n je nepárne *práve vtedy, keď* n^2 je nepárne.
3.4. Dokážte, že ak k a l sú párne čísla, tak aj číslo $k+l$ je párne. Je pravdivá aj obrátená implikácia?
3.5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí $4^n > 3^n + 2^n$.
3.6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
3.7. Dokážte, že $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$
3.8. $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$

4 Reálne, komplexné čísla

4.1. Ktoré reálne čísla spĺňajú nerovnicu $|x-2| \leq 5$.
4.2. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice:
a) $|x-2| + |x+2| = 4$;
b) $|x-2| + |x+2| = 6$;
c) $|x-2| + |x+2| = 2$.

4.3. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice:
   a) $|x-2|-|x+2|=4$;
   b) $|x-2|-|x+2|=6$;
   c) $|x-2|-|x+2|=2$;
   d) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$.

4.4. Pre ktoré reálne číslo c má rovnica $|x^2+12x+34|=c$ práve 3 riešenia?

4.5. Nad reálnymi číslami rozložte na lineárne činitele mnohočlen x^3+4x^2+x-6.

4.6. Ako sa definuje absolútna hodnota $|x|$ reálneho (resp. komplexného) čísla x? Dokážte, že ak a, b sú komplexné čísla, tak $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$.

4.7. Nech i je imaginárna jednotka. Dokážte, že $i^{n+4}=i^n$ pre každé prirodzené číslo n.

4.8. Pre ktoré reálne x má komplexné číslo $x+\frac{\sqrt{5}}{3}i$ absolútnu hodnotu 1.

4.9. Ak máme dve komplexné čísla $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $z_2=\cos\beta+i\sin\beta$, čomu sa rovná ich súčin z_1z_2? (Moivrova veta)

4.10. *Vedeli by ste pomocou komplexných čísel odvodiť vzorec pre $\cos 2x$, $\sin 2x$? Dalo by sa to použiť pre $\sin 3x$, $\cos 3x$, $\sin nx$, $\cos nx$?

5 Množiny

5.1. Množina M pozostáva z párnych čísel väčších ako $\frac{17}{3}$ a menších ako $\frac{168}{9}$ a tiež z nepárnych kladných čísel menších ako $\frac{323}{32}$. Napíšte všetky prvky množiny M.

5.2. Určte prienik množín A a B, ak A je množina kladných celých čísel deliteľných troma alebo piatimi, ktoré sú menšie ako $\frac{301}{6}$ a B je množina prvočíselných deliteľov čísla 90.

5.3. Čomu sa rovná $A\cap B$ a $A\cup B$, ak $A=\{2n; n\in\mathbb{Z}\}$ a $B=\{3n; n\in\mathbb{Z}\}$?

5.4. Platí $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ pre ľubovoľné množiny A, B?

5.5. Označme $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. (T.j. $A\triangle B$ je tzv. *symetrická diferencia* množín A, B; obsahuje tie prvky, ktoré patria práve do jednej z týchto dvoch množín.) Zdôvodniť, že $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$.

6 Rôzne

6.1. Rozhodnite, či sa priamka v rovine, ktorá je daná rovnicou $2x-5y=-2$ pretína s priamkou, ktorej rovnica je $2x+3y=4$.

6.2. Nájdite všetky možné predpisy, ktoré všetkým prvkom z množiny

$$M=\{\left(\frac{1+3i}{1-3i}\right)^2-\left(\frac{1-3i}{1+3i}\right)^2,\frac{1}{i}+\frac{1-i}{1+i}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\}$$

jednoznačne priradia prvky z množiny reálnych čísel patriacich do M.

6.3. Dokážte, že $\sqrt{2}$ aj $\sqrt{3}$ sú iracionálne čísla.

6.4. Dokážte, že $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je iracionálne číslo.

1 Definícia zobrazenia

1.1. Ak $A \neq \emptyset$, nájdite všetky zobrazenia $A \to \emptyset$ a $\emptyset \to A$. Existuje zobrazenie z $\emptyset$ do $\emptyset$?

1.2. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení množiny M do množiny N?

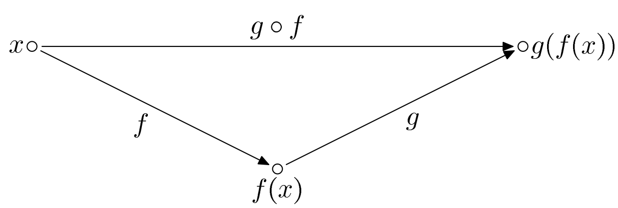
1.3. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje injekcií/bijekcií $M \to N$?

1.4. Nech A je konečná množina a $f\colon A \to A$ je zobrazenie. Dokážte:
a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.
Ukážte na príklade, že pre nekonečné množiny tieto tvrdenia vo všeobecnosti neplatia.

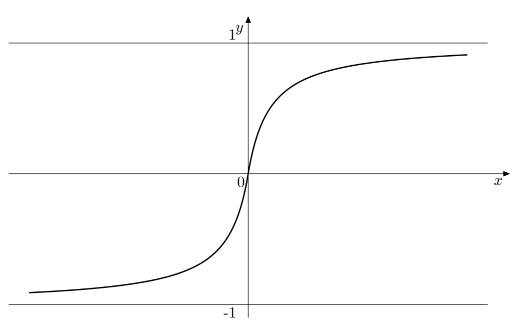
2 Skladanie zobrazení

Ak $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$, tak $g \circ f\colon X \to Z$ je definované ako

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



2.1. Pre dané zobrazenia $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? Vedeli by ste načrtnúť grafy f, g, $g \circ f$, $f \circ g$?
a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$;
b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$;
c) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$;
d) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = x^2$;
e) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \geq 0, \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x < 0. \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \notin (-1, 1), \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x \in (-1, 1), x \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \in (-1, 1), x < 0 \end{cases}$



2.2. Pre dané zobrazenia $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ označuje množinu prirodzených čísel)

a) $f(n) = 2n$, $g(n) = \lceil n/2 \rceil$;

b) $f(n) = n+1$, $g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{ak } n \geq 2, \\ 1 & \text{ak } n = 1. \end{cases}$

2.3. Dokážte: Nech $f\colon X \to X$ je zobrazenie. Ak pre každé zobrazenie $g\colon X \to X$ platí $f \circ g = g \circ f$, tak $f = id_X$.

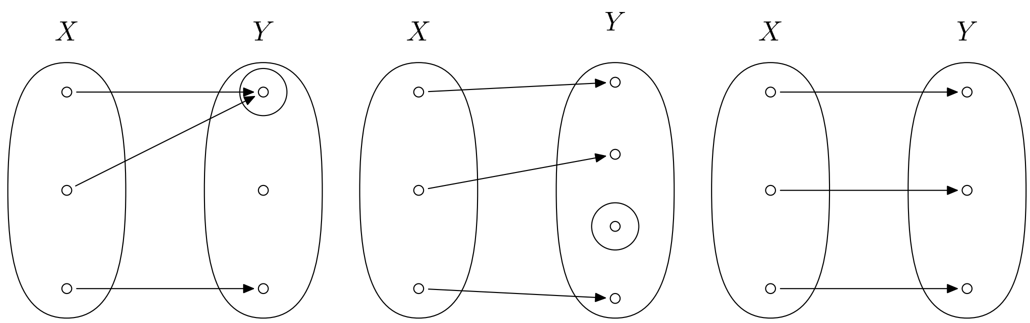
3 Injekcia, surjekcia, bijekcia

Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je

- *injekcia,* ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in X$ z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ vyplýva $x_1 = x_2$-
- *surjekcia,* ak pre ľubovoľné $y \in Y$ existuje $x \in X$, ktoré sa naň zobrazí.
- *bijekcia,* ak je injekcia aj surjekcia.

Dve ekvivalentné definície injekcie:

$$(\forall x_1, x_2 \in X) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



3.1. Dokážte: Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Platí aj opačná implikácia? Musí byť f surjekcia?

3.2. Dokážte: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.

3.3. Dokážte: Ak $g \circ f$ je bijekcia, tak f je injekcia a g je surjekcia.

3.4. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $X \neq \emptyset$ (t.j. X je neprázdna množina). Potom:
a) f je injekcia práve vtedy, keď existuje g také, že $g \circ f = id_X$.
b) f je surjekcia práve vtedy, keď existuje h také, že $f \circ h = id_Y$.
c) K zobrazeniu f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia. (Tým sme znovu dokázali tvrdenie hovoriace, že zobrazenie je bijektívne práve vtedy, keď k nemu existuje inverzné zobrazenie.)

3.5. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, $h\colon Y \to X$ sú zobrazenia. Ak g aj h sú inverzné zobrazenia k f, tak $g = h$.

3.6. Nech $f\colon X \to Y$ je surjekcia a $g, h\colon Y \to Z$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.

3.7. Nech $f\colon Y \to Z$ je injekcia a $g, h\colon X \to Y$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.

3.8. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je surjekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Y \to Z$ platí: Ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.

3.9. Dokážte: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je injekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h\colon Z \to X$ platí: Ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.

3.10. LAG 1, 1.1.19(7): Pre zobrazenia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definujme ich súčet ako zobrazenie

$$f + g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

a súčin ako zobrazenie

$$f \cdot g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Je súčet, resp. súčin ľubovoľných dvoch bijekcií zo $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Z}$ znova bijekcia?

4 Inverzné zobrazenia

4.1. Nájdite príklad zobrazenia $f\colon X \to Y$, pre ktoré existuje ľavé inverzné zobrazenie, ale neexistuje pravé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $g\colon Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$, ale neexistuje $h\colon Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$.

4.2. Nájdite príklad zobrazenia $f\colon X \to Y$, pre ktoré existuje pravé inverzné zobrazenie, ale neexistuje ľavé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $h\colon Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$, ale neexistuje $g\colon Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$.

5 Vzor a obraz množiny*

K týmto úlohám sa na cvičení pravdepodobne *nestihneme* dostať, zatiaľ ich môžete ignorovať. (Ale ak vás zaujmú, môžete skúsiť niektoré z nich vyriešiť. Každopádne sa k veciam takéhoto typu neskôr dostanete na predmete 1-MAT-140 Diskrétna matematika (1) – čiže časom sa ich budete musieť naučiť.)

Pre $f\colon X \to Y$ a podmnožiny $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ označujeme

$$f[A] = \{f(x); x \in A\}$$
$$f^{-1}[B] = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

Inak povedané:

$$y \in f[A] \Leftrightarrow (\exists a \in A) y = f(a)$$
$$x \in f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in B$$

5.1. Dokážte: Ak $A \subseteq B$, tak $f[A] \subseteq f[B]$.

5.2. Dokážte: $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$, $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.

5.3. Ktoré z nasledujúcich tvrdení platia a ktoré neplatia? Zdôvodnite.
a) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$
b) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$
c) $f[A \cap B] \supset f[A] \cap f[B]$
d) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
e) $f^{-1}[A \cap B] \subset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
f) $f^{-1}[A \cap B] \supset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
g) $f[f^{-1}[B]] = B$
h) $f[f^{-1}[B]] \subset B$
i) $f^{-1}[f[A]] = A$
j) $f^{-1}[f[A]] \subset A$
k) $g \circ f[A] = g[f[A]]$

5.4. Ak X je množina, tak $P(X)$ budeme označovať množinu všetkých jej podmnožín. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $g\colon P(X) \to P(Y)$ je zobrazenie definované tak, že $g(A) = f[A]$ pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq X$. Dokážte, že f je prosté práve vtedy, keď g je prosté.

5.5. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.

5.6. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia $\Leftrightarrow$ pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[B \setminus A] = f[B] \setminus f[A]$.

1 Binárne operácie

1.1. Vypíšte všetky možné binárne operácie na množine $\{0,1\}$. Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku každému prvku aj inverzný?

1.2. Dokážte, že ak $\circ$ je binárna operácia na množine A a $\circ$ je asociatívna, tak ľubovoľné uzátvorkovanie výrazu $a \circ b \circ c \circ d$ predstavuje ten istý prvok.[1]

1.3*. Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce výsledky (ak sa to dá).

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

1.4*. Nech G je *konečná* množina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G. a) Dokážte, že existuje prvok $a \in G$ taký, že $a \circ a = a$.
b) Ukážte na príklade, že po vynechaní predpokladu o konečnosti už toto tvrdenie neplatí.
(Výsledok dokázaný v tejto úlohe sa stručne dá sformulovať tak, že každá konečná pologrupa obsahuje idempotentný prvok.)

2 Grupy

2.1. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
a) $(\mathbb{Z},\cdot)$ (celé čísla s obvyklým násobením)
b) $(\mathbb{R},\cdot)$ (reálne čísla s obvyklým násobením)
c) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, d) $(\mathbb{C},+)$, e) $(\mathbb{C},\cdot)$, f) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$
g) $(\mathbb{R}^2,+)$ (so sčitovaním definovaným po zložkách)
h) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$, $a*b=a+b-1$
i) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ s operáciou $*$, $a*b=ab+a+b$
j) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
k) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
l) $(\mathbb{Z}_5,\oplus)$

2.2. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade $M=\{1,2,3\}$.

2.3. Je $(\mathbb{R},*)$, kde $a*b=ab+a+b$, grupa? Ak nie, vedeli by ste vynechať niektorý prvok a z množiny $\mathbb{R}$ tak, aby $(\mathbb{R}\setminus\{a\},*)$ bola grupa?

2.4. Nech $G=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$. Je G s operáciou $\cdot$ (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme $C_n=\{z\in\mathbb{C} : z^n=1\}$. Je $(C_n,\cdot)$ grupa?

2.5. Dokážte, že ak $(G,\cdot)$ je grupa a $x,y,z\in G$ tak platí

$$xy = xz \Rightarrow y = z;$$
$$yx = zx \Rightarrow y = z.$$

(Tzv. *zákony o krátení* v grupe.)

2.6. Nech $(G,*)$ je grupa a e je jej neutrálny prvok.. Dokážte:
a) $x*y=y*x \Leftrightarrow x*y*x^{-1}*y^{-1}=e$.
b) Ak $x*x=e$ pre všetky $x\in G$, tak G je komutatívna.

[1] Máme tu na mysli uzátvorkovania *bez výmeny poradia,* ktoré už jednoznačne určujú výsledok operácie. Aspoň bez dôkazu spomeniem, že to isté platí aj pre ľubovoľný počet prvkov. Počet uzátvorkovaní výrazu s n prvkami je n-té *Catalanove číslo.*

2.7. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a\colon G \to G$ definované ako $f_a(b) = a \circ b$ je bijekcia.

2.8. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $f\colon G \to G$ definované ako $f(a) = a^{-1}$ je bijekcia.

2.9*. Nech G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G. Potom G je grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné $a, b \in G$ majú rovnice

$$a \circ x = b$$
$$y \circ a = b$$

riešenie v G (inými slovami, pre ľubovoľné $a, b \in G$ existujú $x, y \in G$, ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

2.10*. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

2.11*. Nech $*$ je binárna operácia na množine G, ktorá je
a) asociatívna,
b) existuje prvok $e \in G$ taký, že $(\forall x \in G) e * x = x$
c) pre každý prvok $x \in G$ existuje $y \in G$ také, že $x * y = e$ (kde e označuje prvok z časti b) t.j.

$$(\forall x \in G)(\exists y \in G) y * x = e.$$

Dokážte, že potom $(G, *)$ je grupa. (Všimnite si, že uvedené podmienky sa síce podobajú na definíciu neutrálneho a inverzného prvku, ale v oboch prípadoch tam máme iba jednu z dvoch rovností, ktoré vystupujú v definícii.)

2.12. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

2.13. Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \dots, a_n\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Dokážte, že $(a_1 * a_2 * \dots * a_n)^2 = e$.

2.14. Nech $*$ je binárna operácia na množine A, taká, že pre každé $a, b, c \in A$ platí $a*(b*c) = (a*c)*b$ a $*$ má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.

2.15. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

2.16. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme $(a, b) \square (c, d) = (2ac, b + d)$, je grupa.

2.17. Nech $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

2.18. Nech $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

2.19. Nech $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$ sú grupy. Dokážte, že aj $G \times H$ s operáciou $*$ definovanou ako

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

je grupa.

2.20. Doplňte nasledujúcu tabuľku

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

tak aby ste dostali grupu.

2.21. Ak pre každý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

2.22. Nech G je grupa, e je jej neutrálny prvok a $a, b \in G$. Ukážte, že ak $(ab)^2 = e$, tak aj $(ba)^2 = e$.