Determinanty

Chceli by sme zopakovať nejaké veci o determinantoch. (Determinanty sa nám budú počas tohoto semestra hodiť pri výpočte vlastných hodnôt a charakteristického polynómu matice.)

1. Nech A je matica 4×4, ktorá obsahuje iba čísla ± 1. Ukážte, že $|A|$ je celočíselný násobok 8.
2. Vedeli by ste nájsť maticu, ktorej determinant je $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$? Vedeli by ste pomocou determinantov odvodiť $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$? Viete nájsť všetky reálne riešenia rovnice $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$?
3. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} =?$
4. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} =?$
5. Vypočítajte determinant matice typu $n \times n$
$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} =?$$
(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné x a všetky prvky mimo diagonály sú rovné a.)
6. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D$$
(Hint: Možno sa oplatí začať tým, že si rozmyslíte, ako to je s determinantami nejakých jednoduchších matíc – napríklad $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ alebo $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.)
7. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D$$
Ukážte, že ak A a C komutujú, potom sa determinant rovná $\det(AD - CB)$.

Návrat k sústavám lineárnych rovníc

Pri týchto úlohách sa oplatí trochu zamyslieť nad tým, či nejako súvisia s afinnými priestormi, o ktorých ste sa začali učiť na prednáške.

1. Nájdite riešenie danej sústavy a zapíšte množinu riešení. Ako by vyzeralo riešenie príslušnej homogénnej sústavy? Aký je vzťah medzi týmito dvoma množinami?

$$\begin{array}{llllll} x_1 & -x_2 & & +x_4 & +x_5 & = 2 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & +4x_5 & = -1 \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -x_4 & +5x_5 & = -2 \\ 2x_1 & -5x_2 & -3x_3 & +2x_4 & -x_5 & = 7 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & +2x_5 & = 3 \\ x_1 & -2x_2 & & +x_4 & -4x_5 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & & = 3 \\ x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = 8 \end{array}$$

2. Aký je prienik množín riešení homogénnych systémov z predošlej úlohy? Aký je prienik množín riešení nehomogénnych systémov z predošlej úlohy?

3. Nájdite dvojice premenných spomedzi $x_1, x_2, \dots, x_5$, ktoré môžu byť voľnými premennými v množine riešení homogénneho systému s maticou:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 9 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & -4 & 2 \\ 3 & -8 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & -2 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$