

Afinné priestory

Pripomenutie definícií:

Afinný priestor znamená, že $(V, +)$ je vektorový priestor nad \mathbb{R} , $\mathcal{B} \neq \emptyset$ a:

- 1) máme zobrazenie $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow V$, ktoré dvojici bodov (X, Y) priradí práve jeden vektor \overrightarrow{XY} ;
- 2) pre ľubovoľné $X \in \mathcal{B}$ a $\vec{x} \in V$ existuje práve jeden bod $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$;
- 3) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$

Ekvivalentná definícia:

$(V, +)$ je vektorový priestor, $\mathcal{B} \neq \emptyset$ a máme $+$: $\mathcal{B} \times V \rightarrow \mathcal{B}$, pričom platí:

- 1) $X + (\vec{a} + \vec{b}) = (X + \vec{a}) + \vec{b}$;
- 2) $X + \vec{x} = X \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
- 3) Pre ľubovoľné $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ existuje jediný vektor $\vec{a} \in V$ taký, že $X + \vec{a} = Y$; označujeme ho aj $\vec{a} = Y - X$.

V dôkaze ekvivalencie týchto definícií sa ukáže, že:

$$Y - X = \overrightarrow{XY};$$

$$X + \overrightarrow{XY} = Y.$$

1. Pre afinný priestor $(\mathcal{B}, V, +)$ dokážte, že:
 - (a) $(Y - X) + (X - Z) = Y - Z$ pre všetky $X, Y, Z \in \mathcal{B}$;
 - (b) $X - X = \vec{0}$ pre všetky $X \in \mathcal{B}$;
 - (c) $(X + \vec{a}) - (Y + \vec{b}) = (X - Y) + \vec{a} - \vec{b}$ pre všetky $X, Y \in \mathcal{B}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V$.
2. Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3, 1); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, 0); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Dostaneme takto afinný priestor? (Ako operácie použijeme obvyklé sčítovanie štvoric.)

Vedeli by ste nájsť aspoň dva rôzne afinné izomorfizmy $(\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$?

3. [HZK, Cvičenie 2.1.1] Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$$

a

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Dokážte, že (\mathcal{B}, V) s obvyklým sčítovaním trojíc reálnych čísel je dvojrozmerný afinný priestor nad polom \mathbb{R} .

4. [HZK, Cvičenie 2.1.2] Nech P_4 je množina všetkých reálnych polynómov stupňa najviac 4. (Na tejto množine máme obvyklú operáciu sčítovania polynómov.) Nech $\mathcal{B} := \{f(x) \in P_4; f(0) = 1\}$ a $V := \{f(x) \in P_4; f(0) = 0\}$. Overte, že (\mathcal{B}, V) je štvorrozmerný afinný priestor (ak uvažujeme obvyklé operácie).

Afinné zobrazenia

Afinné zobrazenie: $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$, $\varphi: V \rightarrow V'$; zobrazenie φ je lineárne a platí $\varphi(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{f(X)f(Y)}$.

Afinný izomorfizmus = afinné zobrazenie + bodová zložka je bijekcia \Leftrightarrow afinné zobrazenie + vektorová zložka je lineárny izomorfizmus

1. Ukážte, že ak (f, φ) je afinný izomorfizmus, tak aj (f^{-1}, φ^{-1}) je afinný izomorfizmus.
2. Nech $(f, \varphi): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je afinné zobrazenie. Nech (\mathcal{C}, V) je afinný podpriestor priestoru \mathcal{B} . Je aj $f^{-1}[\mathcal{C}]$ afinný podpriestor priestoru \mathcal{A} ? Čo bude jeho vektorová zložka?

3. Nech $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je afinný súradnicový systém v afinnom priestore $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$. Nech $\mathcal{A}' = (\mathcal{B}', V')$ je tiež afinný priestor, $O' \in \mathcal{B}'$ a $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n \in V'$. Ukážte, že podmienkami $f(O) = O'$, $f(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i$ pre $i = 1, \dots, n$ je jednoznačne určené afinné zobrazenie $(f, \varphi): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$.

Afinné a barycentrické súradnice

Afinný súradnicový systém: $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, kde $O \in \mathcal{B}$ a $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza V .

Súradnice bodu X sú (x_1, \dots, x_n) , ak $\vec{OX} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$. Označenie $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$.

Barycentrická kombinácia $\sum_{i=0}^s x_i A_i$, kde $\sum_{i=0}^s x_i = 1$, je definovaná ako

$$\sum_{i=0}^s x_i A_i = A + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A).$$

(Nezávisí od voľby bodu A .)

(A_0, A_1, \dots, A_n) je barycentrický súradnicový systém \Leftrightarrow každý bod sa dá jednoznačne vyjadriť ako ich barycentrická kombinácia $\Leftrightarrow (A_0; A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je afinný súradnicový systém.

1. [HZK, Cvičenie 2.3.1] Majme afinný priestor (\mathcal{B}, V) , kde

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\},$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\},$$

a berieme obvyklé operácie (t.j. ide o afinný podpriestor $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.)

- a) Overte, že trojica $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, kde $O = (1, 2, -1)$, $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 0)$, tvorí afinný súradnicový systém v tomto priestore.
- b) Vyjadrite súradnice bodu $P = (3, 4, 1)$ v tejto súradnicovej sústave. Vedeli by ste nájsť aj všeobecný predpis, ako dostaneme súradnice ľubovoľného bodu $P = (x_1, x_2, x_3)$ patriaceho do \mathcal{B} ?
- c) Definujme $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ako $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2 - 1)$. Predstavujú hodnoty $f(x_1, x_2, x_3)$ súradnice bodu (x_1, x_2, x_3) v nejakej vhodnej súradnicovej sústave? Ak áno, nájdite taký afinný súradnicový systém $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$.
- d) Ako by to bolo so zobrazením $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definovaným ako $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 + 1, x_1 - x_2 + 2)$?
2. [HZK, Cvičenie 2.3.31] V rovine určenej bodmi $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (-3, 0, 4)$ zvolme afinnú súradnicovú sústavu $(A, B - A, C - A)$.
- a) Aké parametrické vyjadrenie má v tejto súradnicovej sústave priamka BC ?
- b) Aké súradnice má bod M v $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ak jeho súradnice v $(A, B - A, C - A)$ sú $(5, 3)$.
- c) Aké súradnice má priesečník roviny ABC s osou x_3 v jednej i druhej súradnicovej sústave.
3. Ukážte, že barycentrická kombinácia barycentrických kombinácií je opäť barycentrická kombinácia.
4. Zistite, či body
- $A_0 = (1, 4, 1, -1)$
- $A_1 = (2, 2, 4, -5)$
- $A_2 = (1, 5, 0, 0)$
- $A_3 = (2, 7, 1, -4)$
- $A_4 = (1, -3, 4, 4)$ tvoria barycentrický súradnicový systém v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. Vyjadrite bod $P = (0, -1, 1, 4)$ ako ich barycentrickú kombináciu. (Výsledok: $P = A_1 - A_0 + 3A_2 - 2A_3$)

5. Nech A, B, C je trojuholník v ľubovoľnom afinnom priestore.
- Ako vyzerajú ťažnice tohoto trojuholníka vyjadrené a afinnom súradnicovom systéme (A, \vec{AB}, \vec{AC}) ? (Pokúste sa vyjadriť ich parametricky, t.j. napísať nejaký predpis taký, že ak meníme reálny parameter, dostaneme všetky body ležiace na ťažnici.)
 - Ukážte, že ťažnice sa pretínajú práve v jednom bode.
 - Aké sú barycentrické súradnice tohoto bodu?
6. Nech A, B, C je trojuholník v rovine a T je jeho ťažisko (barycentrum).
- Ukážte, že $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = \vec{0}$.
 - Ukážte, že pre ľubovoľný bod X v rovine platí

$$|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|XT|^2.$$

Môžete si všimnúť, že z tejto rovnosti vyplýva, že súčet štvorcov vzdialeností od vrcholov trojuholníka je minimálny práve v ťažisku trojuholníka. (Hint: Skúste využiť skalárny súčin.)

- Ako by sa zmenili výsledky z častí a) a b) ak by sme namiesto troch bodov v rovine zobrali n bodov v euklidovskom priestore ľubovoľnej dimenzie?
7. V trojrozmernom euklidovskom priestore sú dané štyri body A, B, C a D neležiace v jednej rovine. Na úsečkách AB, CD, AC a BD sú dané body K, L, M a N tak, že

$$|AK| : |KB| = |CL| : |LD| \text{ a } |AM| : |MC| = |BN| : |ND|$$

- Dokážte, že úsečky KL a MN sa pretínajú práve v jednom bode.
 - V akom pomere delí priesečník úsečiek KL a MN tieto úsečky?
8. Dokážte: a) Body $A \equiv (a_1, a_2), B \equiv (b_1, b_2), C \equiv (c_1, c_2)$ dvojrozmerného afinného priestoru ležia na jednej priamke práve vtedy keď

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

- b) Body $A \equiv (a_1, a_2, a_3), B \equiv (b_1, b_2, b_3), C \equiv (c_1, c_2, c_3), D \equiv (d_1, d_2, d_3)$ trojrozmerného afinného priestoru ležia na jednej priamke práve vtedy keď

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 0.$$

- Vedeli by ste to zovšeobecniť na n -rozmerný priestor a nadrovinu?
9. Na priamkach určených stranami AB, BC a AC trojuholníka ABC sú dané body $A' = B + a(C - B), B' = C + b(A - C), C' = A + c(B - A)$. Dokážte, že body A', B', C' ležia na jednej priamke práve vtedy keď $ab + bc + ac - a - b - c + 1 = 0$.
10. Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník v \mathbb{R}^2 . Tvorí A, B, C barycentrickú súradnicovú sústavu? Vyjadrite v nej ostatné body šesťuholníka.

Literatúra

[HZK] Milan Hejný, Valent Zatl'ko, and Pavel Kršňák. *Geometria 1*. SPN, Bratislava, 1985.