

1 Vzďialenosť afinných podpriestorov

- 1.1. [P, 1376] Ukážte, že vzdialenosť medzi dvoma afinnými podpriestormi $P_1 = A_1 + V_1$ a $P_2 = A_2 + V_2$ sa rovná dĺžke ortogonálnej projekcie vektora $\overrightarrow{A_1A_2}$ do priestoru V^\perp , kde $V = V_1 + V_2$.
- 1.2. Ukážte, že vzdialenosť medzi dvoma afinnými priestormi $P_1 = A_1 + V_1$ a $P_2 = A_2 + V_2$ sa rovná vzdialenosti bodu A_1 od afinného podpriestoru $A_2 + V$, kde $V = V_1 + V_2$.
- 1.3. [BPC, 34.21] Nájdite vzdialenosť bodu A od priamky l :
- $A = (0, 3, 2, -5)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 1 + t, x_2 = -t, x_3 = 2 + 2t, x_4 = -2 + 2t\}$;
 - $A = (2, -2, 1, 5)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 3 + t, x_2 = -1 + t, x_3 = 2 + t, x_4 = -t\}$;
 - $A = (3, 3, 1, 0, 0)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5; x_1 = 2 + 3t, x_2 = 1 + 2t, x_3 = -t, x_4 = 1 + t, x_5 = -1 - t\}$;
 - $A = (1, -1, -1, 1)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 = 0, 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 0\}$.
- [Výsledky: a) 3; b) $2\sqrt{3}$; c) 4; d) $\sqrt{6}$.]
- 1.4. [BPC, 34.23] Nájdite vzdialenosť medzi priamkami l_1 a l_2 :
- $l_1: x_1 = 1 + t, x_2 = -1, x_3 = -t, x_4 = -2 + t$; $l_2: x_1 = 4 + t, x_2 = 2t, x_3 = 1 + t, x_4 = t$
 - $l_1 = \{(2 + t, -1 - 2t, 2 + 2t, 1 - t); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(3 - t, 1 + 2t, -1 - 2t, 2 + t); t \in \mathbb{R}\}$;
 - $l_1 = \{(3 + t, 2, t, 3 + t, -t); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(1 + 2t, 2t, 1 - t, t, 2); t \in \mathbb{R}\}$;
 - $l_1 = \{(1 + t, 2t, 1 - t, -1 + t, t); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(3 + t, -2t, -1 - t, 1 + t, 2 + t); t \in \mathbb{R}\}$;
 - $l_1 = \{(1 - 2t, 0, t, 1 + t, 2); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(-1 + t, -1 + t, 0, 1, -2 - t); t \in \mathbb{R}\}$;
- [Výsledky: a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{5}$; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) 4]
- 1.5. Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = (0, 2, 1, 0)$ od roviny $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = 1 - v \\ x_3 = 1 - u \\ x_4 = v \end{cases}$ a jeho kolmý priemet. [Výsledok: $A^\perp = (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$]
- 1.6. Nájdite priamku q , ktorá je rovnobežná s priamkou $p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 3x_1 + 4x_2 - 1 = 0\}$, a platí pre ňu $\rho(S, q) = 1$, kde $S = (2, 1)$.
- 1.7. Nech $p = \{(x_1, x_2); x_1 = -1 + t, x_2 = 3 - t, t \in \mathbb{R}\}$, $\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 7x_1 + x_2 = 0\}$, $\beta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 - x_2 + 8 = 0\}$. Nájdite bod $P \in p$ taký, že $\rho(P, \alpha) = \rho(P, \beta)$. [Výsledok: $P = (-3, 5)$, $P = (-1, 3)$]
- 1.8. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = 3u + v \\ x_2 = 1 + 2u + v \\ x_3 = -4u - 2v \\ x_4 = 2 + u + v \end{cases}$ $\beta \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 1 = 0 \end{cases}$ $\rho(\alpha, \beta) = ?$ [Výsledok: $\frac{\sqrt{10}}{2}$]
- 1.9. Zistite vzdialenosť afinných podpriestorov $p = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = t, x_2 = 1 + t, x_3 = t, x_4 = -t, x_5 = t, t \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = v, x_2 = u, x_3 = -u, x_4 = v, x_5 = -u, u, v \in \mathbb{R}\}$. [Výsledok: $\frac{\sqrt{14}}{7}$]
- 1.10. [S, 1375] Nájsť vzdialenosť medzi priamkou l a rovinou P ak:
- $l = (9, -2, -1, -1) + [(2, -2, -1, -1)]$; $P = (2, 1, 3, -3) + [(3, -2, 2, 0), (-5, 2, 0, 2)]$;
 - $l = (2, 4, 0, 14) + [(0, 1, -2, 5)]$; $P = (4, 1, -2, 5) + [(-1, 1, -1, 5), (1, 1, -3, 3)]$.
- [Výsledky: a) $\frac{27}{5}$; b) $\sqrt{6}$]
- 1.11. [S, 1376] Nájdite vzdialenosť medzi priamkou l a rovinou P , ak:
- $l = (9, -2, -1, -1) + [(2, -2, -1, -1)]$; $P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; 2x + 4y + z + t =$

$$8, 2x + 7y + 4z - 2t = 29\};$$

$$\text{b) } l = (2, -3, 1, -4) + [(-1, 2, 1, 1)]; P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + 12t = 19, 5x + 2y - 7z - 6t = -7\};$$

$$\text{c) } l = (2, 4, 0, 14) + [(0, 1, -2, 5)]; P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; 2x - 2y + z + t = 9, 4x + 2y + 3z + t = 17\};$$

Výsledky: a) $27/5$, b) $\sqrt{13}$, c) $\sqrt{6}$

1.12. [P, 1377] Nájdite vzdialenosť dvoch rovín v \mathbb{R}^4 ak jedna z nich je určená bodom $X = (4, 5, 3, 2)$ a vektormi $\vec{a} = (1, 2, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -2, 1, 2)$, druhá je určená bodom $Y = (1, -2, 1, -3)$ a vektormi $\vec{c} = (2, 0, 2, 1)$, $\vec{d} = (1, -2, 0, -1)$.

1.13. Nájdite vzdialenosť zadaných afinných podpriestorov \mathbb{R}^4 :

$$\text{a) priamka } p = \{(2 + t, 1 + t, 2 + 2t, -2); t \in \mathbb{R}\} \text{ a rovina } \alpha = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2\} \text{ v } \mathbb{R}^4;$$

2 Uhly, kolmosť

$$2.1. \text{ Nech } A = (7, -4, -1, 2) \text{ a } \alpha \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{Nájdite } A^\perp. \text{ [Výsledok: } A^\perp = (5, -5, -2, -1)]$$

$$2.2. \alpha \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0 \end{cases} \quad p \equiv \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 + 2t \end{cases}$$

Nájdite priamku q takú, že $(0, 0, 0, 0) \in q$, $q \perp p$ a $q \perp \alpha$. [Výsledok: $q = \{(11u, 3u, -4u, 4u); u \in \mathbb{R}\}$]

$$2.3. \text{ Nech } P = (1, -1, 2, 1)$$

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2 = 0 \end{cases} \quad \beta \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 + u + v \\ x_3 = -u \\ x_4 = 1 - v \end{cases}$$

Nájdite priamku p takú, že $P \in p$, $p \perp \alpha$ a p pretína β .

$$2.4. \alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 + v \\ x_3 = v \\ x_4 = v \\ x_5 = u \end{cases} \quad \beta \equiv \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - 1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{Nájdite rovinu } \gamma \text{ takú, že } \gamma \supseteq \alpha \text{ a}$$

$\gamma \perp \beta$. (Akú dimenziu môže mať afinný podpriestor γ , ak má spĺňať tieto 2 podmienky?)

Literatúra

[BPC] L. A. Beklemisheva, A. Yu. Petrovich, and I. A. Chubarov. *Sborník zadach po analiticheskoj geometrii i lineinoi algebre*. Fizmatlit, 2004.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sborník zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.

- [S] Yu. M. Smirnov. *Sbornik zadach po analiticheskoj geometrii i linejnoj algebre*. Golos, Moskva, 2005.