

# 1 Podobnosť matíc

Matice  $A$  a  $B$  sú *podobné*  $\Leftrightarrow$  existuje regulárna matica  $P$  taká, že  $PAP^{-1} = B$ . Táto podmienka je ekvivalentná s tým, že  $A$  aj  $B$  predstavujú maticu toho istého zobrazenia v dvoch rôznych bázach. (Konkrétne, ak  $A$  je matica nejakého zobrazenia pri štandardnej báze, tak  $B = PAP^{-1}$  je matica toho istého zobrazenia pri báze určenej riadkami matice  $P$ .)

Ak  $c\vec{v} = \vec{v}A$ , kde  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , tak  $\vec{v}$  je *vlastný vektor* matice  $A$  a  $c$  je *vlastná hodnota* (*vlastné číslo*) matice  $A$ .

Vlastné hodnoty sú presne korene *charakteristického polynómu*  $\chi_A(t) = \det(tI - A)$  matice  $A$ .

Podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm (a teda aj rovnakú stopu, determinant, vlastné čísla).

Matica typu  $n \times n$  je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď jej vlastné vektory tvoria bázu priestoru  $F^n$ . Matice  $P$  a  $D$  také, že  $PAP^{-1} = D$ , kde  $P$  je regulárna a  $D$  je diagonálna, dostaneme tak, že  $D$  má na diagonále vlastné čísla a  $P$  má ako riadky (v rovnakom poradí) vlastné vektory.

*Jordanov normálny tvar.* Každá matica nad  $\mathbb{C}$  je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.1. Vypočítajte charakteristický polynóm a vlastné hodnoty daných matíc. Zistite, či dané matice sú podobné:

a)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ ;

b) [P, 1067]  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$

1.2. [P, 1064] Zistite, či matice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$  sú podobné.

1.3. Nájdite diagonálnu maticu podobnú s danou maticou:

a)  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  nad poľom  $\mathbb{Q}$ ;

b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Vlastné čísla sú:  $-5, 1$ . b) Vlastné čísla sú  $\pm\sqrt{2}$ .

1.4. Musia byť matice, ktoré majú rovnaké vlastné čísla, podobné?

1.5. Dokážte, že ak  $A$  a  $B$  sú podobné, tak sú podobné aj matice  $A - cI$  a  $B - cI$  (pre ľubovoľné  $c \in F$ ).

1.6. [P, 1051] Nech  $\varphi$  je ľubovoľná permutácia množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Dokážte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} a_{\varphi(1)\varphi(1)} & a_{\varphi(1)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(1)\varphi(n)} \\ a_{\varphi(2)\varphi(1)} & a_{\varphi(2)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(2)\varphi(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\varphi(n)\varphi(1)} & a_{\varphi(n)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(n)\varphi(n)} \end{pmatrix}$$

sú podobné.

- 1.7. Zistite pre aké hodnoty parametrov  $a, b, c \in \mathbb{C}$  je daná matica (nad  $\mathbb{C}$ ) podobná s diagonálnou maticou.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix};$$

## 2 Vlastné čísla, vlastné vektory

- 2.1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory nad poľom  $\mathbb{C}$ .

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \text{ b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ d) } \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}, \text{ e) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla sú: a)  $-2, 7$ ; b)  $3 \pm 2i$ ; c)  $-3, 2$ ; d)  $-2, 3$ ; e)  $2, 2 \pm \sqrt{2}$

- 2.2. Ukážte, že matica  $A$  je singulárna práve vtedy, keď  $0$  je jej vlastné číslo.  
 2.3. Ukážte, že ak  $A$  je regulárna, tak matice  $A$  a  $A^{-1}$  majú rovnaké vlastné vektory. Čo viete povedať o vlastných hodnotách?  
 2.4. Nech  $A$  je matica typu  $n \times k$  a  $B$  je matica typu  $k \times n$ . Ukážte, že: a) Ak *nenulové* vlastné hodnoty matíc  $AB$  a  $BA$  sú rovnaké.  
 b) Platilo by tvrdenie z predošlej časti po vynechaní slova *nenulové*?  
 c) Ak  $k = n$  matice  $AB$  a  $BA$  majú rovnaké vlastné hodnoty.  
 2.5. [K, 4005] Ukážte, že ak každý nenulový vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  je vlastným vektorom matice  $A$ , tak  $A = cI$  pre nejaké  $c \in \mathbb{R}$ .  
 2.6. Aké matice sú podobné s maticou  $I$ ? Aké matice sú podobné s nulovou maticou?  
 2.7. Nech  $A$  je matica  $n \times n$  nad poľom  $\mathbb{C}$  taká, že pre každú regulárnu maticu  $n \times n$  platí  $PAP^{-1} = A$ . Ukážte, že potom  $A = cI$  pre nejaké  $c \in \mathbb{C}$ . (Inak povedané, týmto sme charakterizujeme také matice, že  $A$  je podobná sama so sebou a už so žiadnou inou maticou. T.j. trieda ekvivalencie tejto matice pri relácii „podobnosť matíc“ je jednoprvková.)  
 2.8. Nech  $A$  je štvorcová matica nad poľom  $\mathbb{C}$  taká, že  $1$  nie je jej vlastná hodnota. Ukážte, že ak  $A^n = I$ , tak  $A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I = 0$ .  
 2.9. Nájdite maticu  $3 \times 3$ , ktorej vlastné čísla sú  $1, 2, 3$  a táto matica má aspoň sedem nenulových prvkov.

## 3 Charakteristický a minimálny polynóm

- 3.1. Ukážte, že podobné matice majú rovnaký charakteristický aj minimálny polynóm. Dá sa na základe toho usúdiť, že majú aj rovnaký determinant a stopu?  
 3.2. \* Dokážte, že každé vlastné číslo matice  $A$  je koreňom jej minimálneho polynómu  $m_A(x)$ .  
 3.3. Ak viete, že charakteristický polynóm matice  $A$  je  $\chi_A(x) = x^2 + 4x - 5$ , ako vyzerá charakteristický polynóm matice  $A^2$ .  
 3.4. Nech  $A$  je matica typu  $n \times 2$  a  $B$  je matica typu  $2 \times n$ . Dokážte, že ak  $(AB)^2 = 0$ , tak aj  $(BA)^2 = 0$ . (Hint: Čo viete povedať o vlastných hodnotách matice  $BA$ , prípadne o jej minimálnom či charakteristickom polynóme.)

## Literatúra

- [K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry*. OPA, Amsterdam, 1996.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.