

Kuželosečky

Chceli by sme zopakovať nejaké základné (v podstate stredoškolské) veci o kuželosečkách.¹

Dôležité je najmä to, aby ste vedeli z rovnice rozoznať typ krivky a aj ju načrtnúť. Ostatné informácie, čo sú tu spomenuté (ako dotyčnice, súradnice ohnísk, parametrizácia), berte ako niečo „navyš“ – na tomto predmete to zrejme potrebovať nebudete.

Literatúra: [ŠBP], [BPC].

Kružnica. Rovnica kružnice so stredom v bode $(0, 0)$ a polomerom r : $x^2 + y^2 = r^2$

Parametrizácia: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

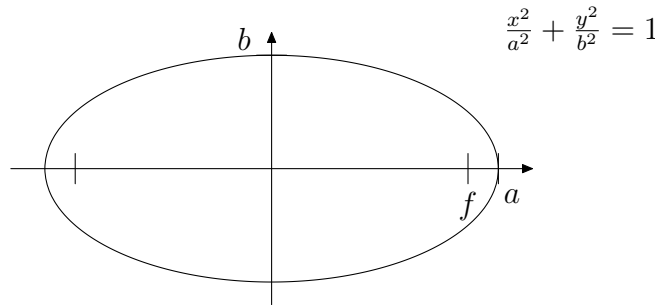
Stred v bode (m, n) : $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Dotyčnica v bode (x_0, y_0) má normálový vektor (x_0, y_0) : $xx_0 + yy_0 = r^2$.

Elipsa. Elipsa je množina bodov, pre ktoré je súčet vzdialeností od zadaných dvoch bodov (ohnísk) konštantný. Rovnica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

predstavuje elipsu so stredom v bode $(0, 0)$ a s hlavnými poloosami dĺžok a , b .



Obr. 1: Elipsa s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a ohniskami $(0 \pm f)$

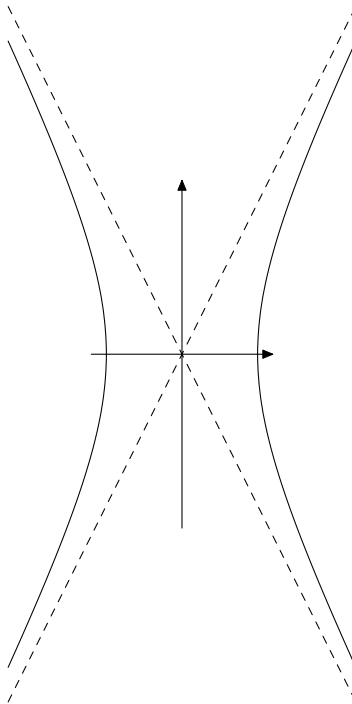
rovnica	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
parametrizácia	$x = a \cos t$, $y = b \sin t$
súradnice ohnísk	$(0, \pm f)$ pre $f = \sqrt{a^2 - b^2}$
dotyčnica v (x_0, y_0)	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Hyperbola. Hyperbola je množina bodov, pre ktoré je rozdiel vzdialeností od zadaných dvoch bodov (ohnísk) konštantný.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rovnica	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
asymptoty	$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$
parametrizácia	$x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$
ohniská	$(0, \pm f)$ pre $f = \sqrt{a^2 + b^2}$
dotyčnica v (x_0, y_0)	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

¹Kuželosečkami ich voláme preto, že sú to presne krivky, ktoré vieme dostať ako prienik roviny s kuželom.



Obr. 2: Hyperbola s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a asymptotami $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$

S funkciami $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ a $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (hyperbolický sínus a kosínus), ktorými sa hyperbola dá parametricky vyjadriť, sa možno stretnete na matematickej analýze.²

Parabola. Parabola s ohniskom F je a určujúcou priamkou d (pričom $F \notin d$) je množina bodov, pre ktoré je vzdialenosť od priamky d a bodu F rovnaká, t.j. $|XF| = |Xd|$.

$$2py = x^2$$

rovnica	$2py = x^2$
ohnisko	$(0, \frac{p}{2})$
určujúca priamka	$y = -\frac{p}{2}$
dotyčnica v (x_0, y_0)	$p(y + y_0) = xx_0$

1. Nakreslite množinu bodov určenú zadanou rovnicou/rovnícami/nerovnicami:

- $x^2 + y^2 \leq 2$;
- $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,
- $4x^2 + 9y^2 = 36$,
- $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$;
- $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;
- $x^2 + 9y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$;

²Pre tieto funkcie platí $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\cosh' x = \sinh x$ a $\sinh' x = \cosh x$. Niekedy sa dajú použiť pri výpočte integrálov pomocou substitúcie. Podobne ako substitúcia $u = a \sin x$ býva často užitočná, ak rátate nejaký integrál obsahujúci výraz $\sqrt{a^2 - x^2}$, tak sa dá často použiť substitúcia $u = a \sinh t$ ak integrál obsahuje výraz $\sqrt{a^2 + x^2}$.

- h) $y = 5 - 4x - x^2$;
 i) $5x^2 - 4y^2 + 20x - 48y + 1 = 0$
2. Nakreslite množinu bodov určenú podmienkami:
- a) $x^2 + y^2 - 4y = 5$;
 b) $x^2 + 2x + 2y^2 - 8y = 4$;
 c) $x^2 + y^2 + 3x < 0, y < 0$;
 d) $4x^2 - 4x + 9y^2 + 6y + 1 < 0$;
 e) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1$;
 f*) $x, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2$ (Hint: Môže pomôcť po úprave sa pozrieť na výsledok v súradnicovej sústave otočenej o $\pi/4$.)
 g) $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} < 6$;
 h) $\left| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} \right| < 1$;
 i) $y^2 - 9x^2 = 9$
3. Napíšte rovnicu daného útvaru:
- a) Kružnica so stredom v bode $(0, 1)$ a polomerom 2.
 b) Dotyčnica ku kružnici $(x-1)^2 + y^2 = 25$ prechádzajúca bodom $(4, 4)$.
 c) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (3, 0), B \equiv (2, -2), C \equiv (6, 6)$. (Ak taká kružnica existuje.)
 d) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (0, 0), B \equiv (3, 0), C \equiv (3, 4)$. (Má trojuholník ABC nejakú špeciálnu vlastnosť, ktorá môže zjednodušiť riešenie tejto úlohy?)
 e) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (1, 1), B \equiv (3, 3), C \equiv (1, 5)$.
 f) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (1, 1), B \equiv (3, 3), C \equiv (3, 5)$.
 g) Dotyčnica k elipse $5x^2 + 9y^2 = 45$ prechádzajúca bodom $(0, -3)$.
 h) Dotyčnica k hyperbole $2x^2 - 3y^2 + 8x^2 + 6y - 25 = 0$ prechádzajúca bodom $(5, 10)$.
 i) Dotyčnica k parabole $6y = x^2$ prechádzajúca bodom $(6, 6)$.

Literatúra

- [BPC] L. A. Beklemisheva, A. Yu. Petrovich, and I. A. Chubarov. *Sborník zadach po analiticheskoj geometrii i lineinoi algebre*. Fizmatlit, 2004.
- [ŠBP] Jaroslav Šedivý, Leo Boček, and Jozef Polák. *Analytická geometria kvadratických útvarov, matematika pre 3. ročník gymnázií*. SPN, Bratislava, 1994.