

Duálny priestor

Duálny priestor k V je priestor V^* všetkých lineárnych zobrazení z V do R .

Báza duálneho priestoru. Ak máme bázu $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ priestoru V , tak za bázu duálneho priestoru V^* môžeme zobrať lineárne zobrazenia b_1^*, \dots, b_k^* jednoznačne určené podmienkami

$$b_i^*(\vec{b}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j, \\ 0 & \text{ak } i \neq j. \end{cases}$$

Kanonickej izomorfizmus. Zobrazenie $\epsilon_V: V \rightarrow V^{**}$ určené ako „evaluácia“, t.j. pre $\varphi \in V^*$ je

$$\epsilon_V(\varphi) = \varphi(\vec{v}),$$

je izomorfizmus medzi V a V^{**} . (Ak V je konečnorozmerný priestor.)

Duálne zobrazenie: Pre lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ je $f^*: W^* \rightarrow V^*$ je určené predpisom $f^*: \varphi \mapsto \varphi \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow ? & \swarrow \varphi \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Ak f má maticu A vzhľadom na bázy $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$, tak f^* má vzhľadom na duálne bázy $w_1^*, \dots, w_k^*, v_1^*, \dots, v_n^*$ maticu A^T .

1. Nech V, W, U sú vektorové priestory nad polom R . Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- Ak $f, g: V \rightarrow W$ sú lineárne zobrazenia, tak $(f + g)^* = f^* + g^*$.
- Ak $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $c \in R$, tak $(cf)^* = cf^*$.
- Ak $f: V \rightarrow W$ a $g: W \rightarrow U$ sú lineárne zobrazenia, tak $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- Pre $id_V: V \rightarrow V$ platí $(id_V)^* = id_{V^*}$.
- Ak $0: V \rightarrow W$ označuje nulové zobrazenie, tak $0^*: W^* \rightarrow V^*$ je tiež nulové zobrazenie.
- Ak $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie, tak platí

$$f^{**} \circ \epsilon_V = \epsilon_W \circ f.$$

Táto rovnosť vlastne hovorí, že ak priestor stotožníme s jeho druhým duálom prostredníctvom kanonického izomorfizmu ϵ_V resp. ϵ_W , tak zobrazenie f je „to isté“ ako zobrazenie f .

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \\ \epsilon_V \uparrow & & \uparrow \epsilon_W \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

g) Nech navyše V je konečnorozmerný a má bázu $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Vieme potom, že v_1^*, \dots, v_n^* tvorí bázu priestoru V^* a $v_1^{**}, \dots, v_n^{**}$ tvorí bázu priestoru V^{**} . Ukážte, že

$$\epsilon_V(\vec{v}_i) = v_i^{**}.$$

Toto tvrdenie vlastne hovorí, že kanonický izomorfizmus medzi V a V^{**} je presne lineárne zobrazenie jednoznačne určené tým, že $v_i \mapsto v_i^{**}$.

h) Vedeli by ste napísať, akým maticovým rovnostiam týkajúcim sa transponovanej matice zodpovedajú niektoré z tvrdení, ktoré sme tu uviedli? Vedeli by ste pomocou tvrdenia g) zdôvodniť tvrdenie f) jednoduchším spôsobom v konečnorozmernom prípade?

2. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie medzi konečnorozmernými priestormi. Dokážte, že:
- f je injektívne $\Leftrightarrow f^*$ je surjektívne.
 - f je surjektívne $\Leftrightarrow f^*$ je injektívne.
- Vedeli by ste dokázať tieto tvrdenia aj bez použitia matice zobrazenia priamo z definície duálneho zobrazenia? Skúste sa pritom zamyslieť aj nad tým, na ktorých miestach využívame to, že V a W sú konečnorozmerné.

Súčasná diagonalizácia*

- Nech pre matice A, B existuje regulárna matica P taká, že $PAP^{-1} = D_1$ aj $PBP^{-1} = D_2$ sú diagonálne matice. Ukážte, že $AB = BA$, t.j. matice A, B komutujú.
- *. Zistite, či pre dané matice A, B existuje regulárna matica P taká, že PAP^{-1} aj PBP^{-1} sú diagonálne:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$