

Determinanty

1. Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant? Výsledky (bez záruky): 0,-8,8.

2. Vyriešte v \mathbb{Z}_5 pomocou Cramerovho pravidla: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 3 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 2 \end{pmatrix}$

3. Pomocou Cramerovho pravidla riešte:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 1 & & x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 0 & & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

(Návod: Skúste zvoliť x_3, x_4 za parametre.)

- 4*. Majme regulárnu maticu A a sústavu tvaru $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$. Označme ako A_i maticu, ktorá vznikne ak v matici A nahradíme i -ty stĺpec pravými stranami.

a) Vedeli by ste vymyslieť vhodnú maticu tak aby platilo $A \cdot B_i = A_i$?

b) Ak ste našli takú maticu, vedeli by ste pomocou nej odvodiť Cramerov pravidlo?

5. Určte determinanty daných matic. Viete na základe výsledku určiť ich hodnotu pre niektoré hodnoty $c \in \mathbb{R}$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6. Vypočítajte determinant

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Dá sa výsledok nejako geometricky interpretovať? (Hovorí tento determinant niečo o lineárnom zobrazení s danou maticou?)

7. Ak viete, že 195, 403 a 247 sú násobky čísla 13, viete ukázať (bez toho, aby ste ho museli vyrátať), že aj $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ je celočíselný násobok 13?

8. Ukážte, že ak $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tak

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

9. Ukážte, že

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = -8$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$.

10. Vypočítajte determinant matice $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$. Použite súčin

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

na odvodenie identity $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$. (Fibonacciho identita)

11. Vypočítajte

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & (n-1)x \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & nx \end{vmatrix}.$$

(Mali by ste dostať $x^{n-2}(x-1)$.)

12. Nech A je matica 4×4 , ktorá obsahuje iba čísla ± 1 . Ukážte, že $|A|$ je celočíselný násobok 8.
13. Ak A, B sú štvorcové matice a matica AB je regulárna, tak obe matice A, B sú regulárne. (Môžete sa zamyslieť nad tým, či to viete zdôvodniť s pomocou determinantov a aj nad riešením bez nich. Takisto sa môžete skúsiť zamyslieť nad tým, čo sa stane ak matice nie sú štvorcové.)
14. Nech A je matica rozmerov 2×3 a B je matica rozmerov 3×2 . Aké hodnoty môže nadobúdať $\det(AB)$? Aké hodnoty môže nadobúdať $\det(BA)$?
15. Permutáciu nazývame *párnu* ak má párny počet inverzií a *nepárnu* ak má nepárny počet inverzií. Vedeli by ste použitím determinantov ukázať, že počet párných a nepárnych permutácií v S_n je rovnaký? (Hint: Možno vám pomôže determinant matice $n \times n$ pozostávajúcej zo samých jednotiek.)
16. Vedeli by ste nájsť maticu, ktorej determinant je $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$? Vedeli by ste pomocou determinantov odvodiť $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$? Viete nájsť všetky riešenia rovnice $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$?

$$17. D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$$

$$18. D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$$

19. Vypočítajte determinant matice typu $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} = ?$$

(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné x a všetky prvky mimo diagonály sú rovné a .)

20. Nájdite všetky hodnoty $x \in \mathbb{C}$ pre ktoré

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

21. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D$$

(Hint: Možno sa oplatí začať tým, že si rozmyslite, ako to je s determinantami nejakých jednoduchších matíc – napríklad $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ alebo $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.)

22. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D$$

Ukážte, že ak A a C komutujú, potom sa determinant rovná $\det(AD - CB)$.