Skalárny súčin

(i) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = \langle\vec{\beta},\vec{\alpha}\rangle$,

(ii) $\langle\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma}\rangle = \langle\vec{\alpha},\vec{\gamma}\rangle + \langle\vec{\beta},\vec{\gamma}\rangle$,

(iii) $\langle c\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = c\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle$,

(iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle > 0$.

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle}$$

(a) $|\vec{\alpha}| \geq 0$

(b) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

(c) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$

(d) $|\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (Schwarzova nerovnosť)

(e) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (trojuholníková nerovnosť)

1. Zistite, či daný predpis určuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$. Nech $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$.
   a) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + 3a_2b_2 - a_3b_3$
   b) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$
   c) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = 3a_1b_2 + 2a_2b_2 + a_3b_3$
   d) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
   e) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
   f) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
   g) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
   h)$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_2 + a_2b_1$
   i)$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$
2. Ukážte, že pre ľubovoľnú symetrickú maticu $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ predpis $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$ definuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$.
3. Overte či predpis
   a) $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
   b) $\langle f, g\rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$
   určuje skalárny súčin na priestore P_2 všetkých polynómov stupňa najviac 2 nad poľom $\mathbb{R}$.
4. Zistite, či $\sin \pi x$ a $\cos \pi x$ sú kolmé v priestore $C(0, 1)$ so skalárnym súčinom z úlohy 7.1.5(3); t.j.
   $$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)d(x)\,\mathrm{d}x.$$
   Akú majú tieto vektory veľkosť?
5. Overte, že v priestore $C(0, 2\pi)$ všetkých spojitých funkcií z uzavretého intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ do $\mathbb{R}$ so skalárnym súčinom $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ sú ľubovoľné dve rôzne funkcie z množiny $\{1, \sin nx, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$ na seba kolmé. (Po vynormovaní by sme dostali množinu funkcií, ktorá má v tomto priestore do istej miery podobné vlastnosti ako ortonormálna báza v konečnorozmerných priestorov. Tento systém funkcií je dôležitý v matematickej analýze v súvislosti s *Fourierovými radmi.*)

6. Dokážte, že v ľubovoľnom euklidovskom priestore platí:
   a) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ (Pytagorova veta)
   b) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle$ (kosínová veta)
   c) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$ (rovnobežníkové pravidlo)
7. LAG1 7.4.3(3): Dokážte, že ak S je vektorový podpriestor euklidovského vektorového priestoru, tak $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$.
8. Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ definujeme stopu matice ako súčet jej diagonálnych prvkov, t.j. $\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Overte, či na vektorovom priestore $M_{n,n}(\mathbb{R})$ určuje predpis
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$$
   skalárny súčin. (Hint 1: Pokúste sa vyjadriť hodnotu $\langle A, B\rangle$ pomocou prvkov matíc A, B. Hint 2: Možno vám pri tom pomôžu rovnosti $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$. Prvá z nich sa dá ľahko overiť pomocou definície súčinu, druhá je zrejmá.)
9. Nájdite bázu a dimenziu $S^\perp$ pre daný podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^4$:
   a) $S = [(1,1,0,1),(2,1,0,1)]$
   b) $S = [(1,5,4,3),(2,-1,2,-1)]$
   c) $S = [(1,2,1,1),(2,1,-1,-1)]$
   d) $S = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$
   e) $S = [(2,1,2,3),(0,1,-2,1),(1,0,2,1)]$
   f) $S = [(1,1,1,2),(1,0,1,1),(0,1,2,1)]$
10. Nájdite ortogonálnu bázu priestoru $V = [(1,0,1,0),(0,2,-1,1),(0,2,1,3)]$.
11. Ukážte, že pre ľubovoľný podpriestor S euklidovského vektorového priestoru V platí $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$. (Hint: Skúste si uvedomiť, ktorú z inklúzií medzi S a $S^\perp$ sme v dôkaze, že $S^{\perp\perp} = S$ platí v konečnorozmerných priestoroch, dokázali bez použitia predpokladu o konečnorozmernosti. Túto inklúziu použite raz pre S a raz pre $S^\perp$.)

12*. Ukážte, že ak $|\cdot|\colon V \to \mathbb{R}$ je funkcia definovaná na vektorovom priestore V nad $\mathbb{R}$, ktorá spĺňa podmienky (a), (b), (c) a (e) i rovnobežníkové pravidlo, tak existuje skalárny súčin na V taký, že $|\alpha| = \sqrt{\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle}$ pre všetky $\vec{\alpha} \in V$.

13. Ukážte, že funkcia $|\cdot|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $|(x_1,\dots,x_n)| = \max\{|x_i|; i = 1,\dots,n\}$ spĺňa podmienky (a), (b), (c) a (e), ale neexistuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$ taký, že $|\alpha| = \sqrt{\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle}$ (pre všetky $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$).
14. V $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite vyjadrenie vektora $(4,1,1,6)$ ako súčtu vektora z podpriestoru L a vektora z $L^\perp$, ak $L = [(1,2,-2,-1),(2,3,3,2),(1,1,2,1)]$.
15. V priestore $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor
$$S = [(1,0,2,-2),(1,-2,1,0),(1,-1,1,-1)].$$
16. V priestore $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor
$$S = [(3,2,2,-1),(4,2,4,-3)].$$
17. Nech S je podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom. Nech P je ortogonálna projekcia na podpriestor S. Ukážte, že potom platí $P^2 = P = P^T$.

18*. Nech P je štvorcová matica nad $\mathbb{R}$ taká, že platí $P^2 = P = P^T$. Ukážte, že potom existuje podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^n$ (s obvyklým skalárnym súčinom) taký, že P je matica ortogonálnej projekcie na S.