- Matica P je ortogonálna $\Leftrightarrow PP^T = I$, t.j. $P^T = P^{-1}$. To platí práve vtedy, keď riadky (stĺpce) matice P tvoria ortonormálnu bázu.
- Pre ľubovoľnú reálnu symetrickú maticu A existujú ortogonálna matica P a diagonálna matica D tak, že
$$PAP^T = PAP^{-1} = D.$$
- Ak A je reálna symetrická matica, tak vlastné vektory zodpovedajúce *rôznym* vlastným hodnotám sú na seba kolmé.
- Ak pracujeme so symetrickou maticou tak riadkové a stĺpcové vlastné vektory sú rovnaké; $\vec{x}A = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x}^T = \lambda\vec{x}^T$. Pri zostavení sústavy na nájdenie vlastných vektorov teda teraz netreba transponovať; $(A - \lambda I)^T = (A - \lambda I)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ -1 & t-2 & 0 \\ 1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ -1 & t-2 & 0 \\ 0 & t-2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ -1 & t-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -1 & t-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t^2-3t) = t(t-2)(t-3)$$

Teraz ešte vypočítame vlastné vektory: *vlastné vektory k* 0*:* $[(2,-1,1)]$ *vlastné vektory k* 2*:* $[(0,1,1)]$ *vlastné vektory k* 3*:* $[(1,1,-1)]$

Máme tri rôzne vlastné hodnoty - preto nám vlastné vektory vyšli navzájom kolmé. Stačí ich už teda iba vynormovať, dostaneme tak ortonormálnu bázu a z nej môžeme zostaviť maticu P. Dostali sme

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

také, že

$$PAP^T = D$$

alebo ekvivalentne $P^T DP = A$

Kontrola:

$$\begin{aligned} P^T DP &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V predošlom príklade sme dostali kolmé vektory „zadarmo“. Ak máme násobnú vlastnú hodnotu, tak budeme musieť ešte urobiť niečo navyše – s tými vektormi, ktoré zodpovedajú násobnej vlastnej hodnote.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = (t-4)^2(t+2)$$

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -2 & 2 \\ -2 & t-3 & -1 \\ 2 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -2 & 2 \\ -2 & t-3 & -1 \\ 0 & t-4 & t-4 \end{vmatrix} = (t-4)\begin{vmatrix} t & -2 & 2 \\ -2 & t-3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-4)\begin{vmatrix} t & -4 & 0 \\ -2 & t-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-4)\begin{vmatrix} t & -4 \\ -2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-4)(t^2-2t-8) = (t-4)^2(t+2)$

Vlastné vektory k 4: $A - 4I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Množina riešení je $[(1,2,0),(0,1,1)]$. My ale chceme pre tento podpriestor ortogonálnu bázu, môžeme zobrať napríklad $[(0,1,1),(1,1,-1)]$.

Vlastné vektory k -2*:* Sú to presne vektory kolmý na vlastný podpriestor k 4, teda $[(2,-1,1)]$.

Ak tieto vektory ešte vynormujeme a poukladáme do P ako riadky, tak pre

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Kontrola:

$$\begin{aligned} P^T D P &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = (t+1)(t-3)^2(t-7)$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & t-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & t-4 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & t-3 & 0 & 0 \\ -1 & t-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & t-4 & -3 \\ 0 & 0 & t-7 & t-7 \end{vmatrix} = (t-3)(t-7)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & t-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & t-4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$(t-3)(t-7)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & t-4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-3)(t-7)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-3)(t-$$
$$7)\begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-3)(t-7)[(t-1)^2-2^2] = (t+1)(t-3)^2(t-7)$$

Vlasné vektory k -1*:* $A+I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Množina riešení: $[(1,-1,-1,1)]$

Vlastné vektory k 7*:* $A-7I = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Množina riešení: $[(0,0,1,1)]$.

Vlastné vektory k 3*:* Môžeme ich hľadať riešením homogénnej sústavy s maticou $A-3I$. Alebo môžeme hľadať vektory kolmé na vlastné vektory k ostatným vlastným hodnotám.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Množina riešení: $[(1,1,0,0),(2,0,1,-1)]$.

Chceme ortogonálnu bázu: $[(1,1,0,0),(1,-1,1,-1)]$

Teraz môžeme vektory, ktoré sme našli, poukladať do matice P.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Platí $PAP^T = D$ resp. $P^TDP = A$.

$$
\begin{aligned}
P^TDP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = t^2(t-4)^2$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & t-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -t & 0 & 0 \\ -1 & t-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t-3 & 1 \\ 0 & 0 & 4-t & t-4 \end{vmatrix} = t(t-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & t-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t-3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$t(t-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t-3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = t(t-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = t(t-4) \begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 2 & t-2 \end{vmatrix} = t(t-4)(t^2-4t) = t^2(t-4)^2$$

Vlastné vektory k 0*:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Množina riešení: $[(1,-1,0,0),(0,2,1,1)] = [(1,-1,0,0),(1,1,1,1)]$. (Druhé vyjadrenie sa nám bude hodiť, keďže chceme ortogonálnu resp. ortonormálnu bázu.)

Vlastné vektory k 4*:* Stačí zobrať vektory kolmé na tie, ktoré sme už našli. Máme $[(1,1,0,-2),(0,0,1,-1)] = [(1,1,-1,-1),(0,0,1,-1)]$.

Teda sme našli matice P a D

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & -\frac12 & -\frac12 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

tak, že $PAP^T = D$ resp. $P^TDP = A$.

$$P^TDP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac12 & \frac12 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & -\frac12 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & \frac12 & -\frac12 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & -\frac12 & -\frac12 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac12 & \frac12 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & -\frac12 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & \frac12 & -\frac12 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2\sqrt2 & -2\sqrt2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = (t-3)^3(t+1)$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & t-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & t-2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & t-3 & t-3 & t-3 \\ -1 & t-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & t-2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & t-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & t-2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$(t-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & t-1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3) \begin{vmatrix} t-1 & 2 & 0 \\ 2 & t-1 & 0 \\ -2 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)^2 \begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 2 & t-1 \end{vmatrix} =$$

$(t-3)^2[(t-1)^2-2^2](t-3)^3(t+1)$

$$\textit{Vlastné vektory k } 3\text{: } A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dostávame: $[(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)]$.

Chceme pre priestor riešení ortogonálnu bázu, tá je napríklad $[(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1)]$.

Vlastné vektory k -1*:* Toto sú presne vektory kolmé na vlastné vektory k 3, čiže dostávame $[(1,-1,-1,1)]$.

Ak tieto vektory ešte vynormujeme (a dostaneme tak ortonormálnu bázu), tak máme matice

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & -\frac12 & -\frac12 \\ \frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12 \\ \frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pre ktoré platí

$$PAP^T = D$$

a $P^TDP = A$.

Kontrola:

$$PAP^T = \frac14 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac14 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac14 \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
P^T D P &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & -3 & -3\\ 3 & -3 & 3 & -3\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}8 & 4 & 4 & -4\\ 4 & 8 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 8 & 4\\ -4 & 4 & 4 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$