Úvod do všeobecnej topológie

23. septembra 2019

1 Úvod

Topologická štruktúra je matematická abstrakcia umožňujúca definovať abstraktne spojité zobrazenia. Jednu z prvých definícií topologického priestoru (ekvivalentnú s tou, ktorá sa dnes najčastejšie používa) podal K. Kuratowski v roku 1922 pomocou uzáverového operátoru. V tomto zmysle je topologická štruktúra relácia medzi bodmi a podmnožinami danej množiny (spĺňajuca 4 Kuratowského axiómy), pričom bod je v relácii s podmnožinou, ak patrí do jej uzáveru. V metrických priestoroch bod patrí do uzáveru podmnožiny, ak jeho vzdialenosť od tejto podmnožiny je nulová. Spojité zobrazenia sú potom také zobrazenia, ktoré zachovávajú túto reláciu, teda, napríklad, spojité zobrazenia medzi metrickými priestorormi zachovávajú nulovú vzdialenosť bodu od podmnožiny metrického priestoru.

Všade v nasledujúcom texte budeme používať tieto označenia:
$\mathbb{N}$ označuje množinu všetkých prirodzených čísel.
$\mathbb{N}_0$ označuje množinu všetkých celých nezáporných čísel.
$\mathbb{Z}$ označuje množinu všetkých celých čísel.
$\mathbb{Q}$ označuje množinu všetkých racionálnych čísel.
$\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel.
$\mathcal{P}(X)$ označuje množinu všetkých podmnožín množiny X.

2 Základné pojmy

V súčasnosti sa topologická štruktúra najčastejšie definuje pomocou systému otvorených množín.

Definícia 2.1. *a) Usporiadaná dvojica $(X, \mathcal{T})$, kde X je množina a $\mathcal{T}$ je systém podmnožín množiny X, sa nazýva topologický priestor, ak platí:*
(t1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$.
(t2) Ak U, $V \in \mathcal{T}$, tak $U \cap V \in \mathcal{T}$.
(t3) Ak $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, tak $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}$.

Systém $\mathcal{T}$ sa nazýva topológia na X a prvky $\mathcal{T}$ sa nazývajú otvorené množiny priestoru $(X, \mathcal{T})$.

Príklady 2.1. *1)* $(X, \mathcal{T}_{ind})$, *kde* X *je množina,* $\mathcal{T}_{ind} = \{\emptyset, X\}$, *je topologický priestor, ktorý sa nazýva indiskrétny priestor.*

2) $(X, \mathcal{T}_{dis})$, *kde* X *je množina,* $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{P}(X)$, *je topologický priestor, ktorý sa nazýva diskrétny priestor.*

3) Nech (X, d) *je metrický priestor (d je metrika na* X*) a* $\mathcal{T}_d = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall_{a\in U} \exists_{\varepsilon>0}\ O_\varepsilon(a) = \{b \in X : d(a, b) < \varepsilon\} \subseteq U\}$. *Potom* $\mathcal{T}_d$ *je topológia na* X *(určená metrikou d) a* $(X, \mathcal{T}_d)$ *je topologický priestor. Je zrejmé, že pre každé* $a \in X$ *a pre každé* $\varepsilon > 0$ *platí, že* $O_\varepsilon(a) \in \mathcal{T}_d$.

4) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, *kde* $\mathcal{T}_{nat}$ *je topológia určená metrikou* $d(x, y) = |x - y|$ *na* $\mathbb{R}$*, je priestor reálnych čísel s prirodzenou topológiou. O tomto topologickom priestore budeme často hovoriť ako o priestore reálnych čísel a označovať ho skrátene* $\mathbb{R}$. *Podobne,* $\mathbb{R}^n$ *bude skrátené označovanie priestoru* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{nat})$, *kde* $\mathcal{T}_{nat}$ *je topológia určená euklidovskou metrikou na* $\mathbb{R}^n$*, ktorá sa nazýva prirodzená topológia na* $\mathbb{R}^n$.

5) $(X, \mathcal{T}_{cof})$, *kde* $\mathcal{T}_{cof} = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \backslash U$ *je konečná* $\} \cup \{\emptyset\}$, *je topologický priestor s kofinitnou topológiou.*

6) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$, *kde* $\mathcal{T}_+ = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, *je topologický priestor.*

7) $S = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$, *kde* $\mathcal{T}_S = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \forall_{a\in U} \exists_{\varepsilon>0}\ [a, a + \varepsilon) \subseteq U\}$, *je topologický priestor, ktorý sa nazýva Sorgenfreyova priamka.*

Definícia 2.2. *Topologický priestor* $(X, \mathcal{T})$ *sa nazýva metrizovateľný, ak existuje metrika d na* X *tak, že* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall_{a\in U} \exists_{\varepsilon>0}\ O_\varepsilon(a) = \{b \in X : d(a, b) < \varepsilon\} \subseteq U\}$, *t. j.* $\mathcal{T}$ *je topológia určená metrikou d.*

Príklady 2.2. *1) Priestory* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{nat})$ *z príkladu 2.1.4) sú metrizovateľné priestory.*

2) Diskrétne priestory sú metrizovateľné topologické priestory. Ak X *je množina, tak zobrazenie* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, *pre ktoré* $d(x, y) = 1$, *ak* $x \neq y$ *a* $d(x, y) = 0$, *ak* $x = y$ *je metrika na* X, *ktorá určuje diskrétnu topológiu na* X.

3) Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ *je* $d_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zobrazenie dané predpisom* $d_n(x, y) = n.|x - y|$. *Je evidentné, že* d_n *je metrika na* $\mathbb{R}$ *a ľahko sa overí, že všetky tieto metriky určujú tú istú topológiu na* $\mathbb{R}$ *(prirodzenú topológiu).*

4) Nech $(X, \mathcal{T})$ *je metrizovateľný topologický priestor a d je metrika na* X *určujúca topológiu* $\mathcal{T}$. *Nech* $a, b \in X$, $a \neq b$ *a* $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{2}$. *Potom* $a \in O_\varepsilon(a)$, $b \in O_\varepsilon(b)$, $O_\varepsilon(a), O_\varepsilon(b) \in \mathcal{T}$ *a* $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \emptyset$. *Teda v každom metrizovateľnom priestore pre každé dva rôzne body existujú disjunktné otvorené množiny, z ktorých jedna obsahuje jeden a druhá druhý z daných bodov. Pretože priestory* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{ind})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ *nemajú túto vlastnosť, sú to príklady priestorov, ktoré nie sú metrizovateľné.*

Ďalší základný pojem v topológii je pojem uzavretej množiny.

Definícia 2.3. *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor. Podmnožina* A *priestoru* $(X, \mathcal{T})$ *sa nazýva uzavretá, ak* $X \backslash A \in \mathcal{T}$.

Príklady 2.3. *V priestore* S *je množina* $[0, 1)$ *aj otvorená aj uzavretá. Množina* $\mathbb{N}$ *je uzavretá v* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ *ale nie je uzavretá v* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ *(v tomto priestore sú* *uzavreté práve konečné množiny a $\mathbb{R}$)ani v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ (v tomto priestore sú uzavreté práve množiny $\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$, $\emptyset$ a $\mathbb{R}$).*

Veta 2.1. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Potom platí:*
(u1) $\emptyset$, X sú uzavreté podmnožiny v $(X, \mathcal{T})$.
(u2) Ak A, B sú uzavreté podmnožiny v $(X, \mathcal{T})$, tak aj $A \cup B$ je uzavretá podmnožina $(X, \mathcal{T})$.
(u3) Ak $\mathcal{S}$ je neprázdny systém uzavretých podmnožín v $(X, \mathcal{T})$, tak aj $\bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$ je uzavretá podmnožina v $(X, \mathcal{T})$.

Dôkaz. Urobíme použitím de Morganových pravidiel a definície topológie. $\square$

Cvičenie 2.1. *Nech X je množina a systém $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ spĺňa podmienky (u1), (u2) a (u3). Potom $\mathcal{T}_\mathcal{V} = \{X \backslash A : A \in V\}$ je topológia na X a $\mathcal{V}$ je systém všetkých uzavretých podmnožín v priestore $(X, \mathcal{T}_\mathcal{V})$. Dokážte.*

Topológiu na množine možno v mnohých prípadoch plnohodnotne nahradiť jej vhodným podsystémom, tzv. bázou topológie, prípadne subbázou topológie.

Definícia 2.4. *a) Podmnožina $\mathcal{B}$ topológie $\mathcal{T}$ priestoru $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva báza topológie $\mathcal{T}$, ak pre každú množinu $U \in \mathcal{T}$ existuje $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tak, že $U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V$.*
b) Hovoríme, že priestor $(X, \mathcal{T})$ spĺňa 2. axiomu spočítateľnosti, ak topológia $\mathcal{T}$ má spočítateľnú bázu.

Často sa používa nasledujúca charakterizácia bázy topológie.

Veta 2.2. *Podmnožina $\mathcal{B}$ topológie $\mathcal{T}$ priestoru $(X, \mathcal{T})$ je báza topológie $\mathcal{T}$, ak pre každé $U \in \mathcal{T}$ a pre každé $a \in U$ existuje $V \in \mathcal{B}$ tak, že $a \in V$ a $V \subseteq U$.*

Dôkaz. Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie $\mathcal{T}$, $U \in \mathcal{T}$ a $a \in U$. Potom existuje systém $\mathcal{C} \in \mathcal{B}$ tak, že $U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V$. Ďalej, existuje $V \in \mathcal{C}$ tak, že $a \in V$. Zrejme $V \in \mathcal{B}$ a $V \subseteq U$.

Obrátene, nech platí uvedená podmienka a $U \in \mathcal{T}$. Potom pre každé $a \in U$ existuje $V_a \in \mathcal{B}$ tak, že $a \in V_a$ a súčasne $V_a \subseteq U$. Zrejme $\mathcal{C} = \{V_a : a \in U\} \subseteq \mathcal{B}$ a $U = \bigcup_{a \in U} V_a$. Teda $\mathcal{B}$ je báza $\mathcal{T}$. $\square$

Príklady 2.4. *1) Ak $\mathcal{T}$ je topológia na X, tak $\mathcal{T}$ je báza $\mathcal{T}$.*
2) V priestore $(X, \mathcal{T}_{ind})$ je $\mathcal{B} = \{X\}$ báza topológie $\mathcal{T}_{ind}$.
3) V priestore $(X, \mathcal{T}_{dis})$ je $\mathcal{B} = \{\{a\} : a \in X\}$ báza $\mathcal{T}_{dis}$.
4) Nech d je metrika na množine X a $\mathcal{T}_d$ je topológia na X určená metrikou d. Potom $\mathcal{B}_1 = \{O_\varepsilon(a) : a \in X,\ \varepsilon > 0\}$ aj $\mathcal{B}_2 = \{O_{\frac{1}{n}}(a) : a \in X,\ n \in \mathbb{N}\}$ sú bázy topológie $\mathcal{T}_d$.
5) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ sú $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ aj $\mathcal{B}_2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ bázy topológie $\mathcal{T}_{nat}$. Báza $\mathcal{B}_2$ je spočítateľná.
6) V priestore $S = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ je systém $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ báza $\mathcal{T}_S$.
7) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ je $\mathcal{B} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}$ báza $\mathcal{T}_+$.
8) Ak $\mathcal{B}$ je báza topológie $\mathcal{T}$ na množine X, $\mathcal{T}'$ je topológia na X a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}'$, tak $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ (vyplýva to z podmienky (t3) Definície 1.1). Teda $\mathcal{T}$ je najmenšia

(vzhľadom na množinovú inklúziu) topológia na X, ktorá obsahuje $\mathcal{B}$. Ďalej z toho vyplýva, že dve rôzne topológie nemôžu mať spoločnú bázu.

9) Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie $\mathcal{T}$ na množine X. Potom $\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ je tiež báza $\mathcal{T}$. Ak $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{T}$, tak aj $\mathcal{B}'$ je báza topológie $\mathcal{T}$.

Cvičenie 2.2. *Dokážte, že ak priestor má spočítateľnú bázu topológie, tak každá báza topológie tohoto priestoru obsahuje spočítateľnú bázu.*

Topológiu na množine je možné definovať tak, že zadáme jej bázu. Nie každý systém podmnožín danej množiny je bázou nejakej topológie. V nasledujúcej vete sú uvedené podmienky, ktoré spĺňa každá báza topológie.

Veta 2.3. *Ak $\mathcal{B}$ je báza topológie priestoru $(X, \mathcal{T})$, tak platí:*

(b1) $\bigcup_{V \in \mathcal{B}} V = X$.

(b2) Ak $V, V' \in \mathcal{B}$ a $c \in V \cap V'$, tak existuje $W \in \mathcal{B}$ tak, že $c \in W$ a $W \subseteq V \cap V'$.

Dôkaz. (b1) vyplýva z toho, že $X \in \mathcal{T}$ (teda pre každé $c \in X$ existuje $V \in \mathcal{B}$ tak, že $c \in V$). Podobne, (b2) vyplýva z toho, že $V \cap V' \in \mathcal{T}$.

$\square$

Podmienky (b1) a (b2) sú zároveň postačujúce k tomu, aby systém $\mathcal{B}$ podmnožín množiny X bol bázou nejakej (jednoznačne určenej týmto systémom) topológie na X.

Veta 2.4. *Nech $\mathcal{B}$ je systém podmnožín množiny X spĺňajúci podmienky (b1) a (b2) z predchádzajúcej vety. Potom $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall_{a \in U} \exists_{V \in \mathcal{B}}\ a \in V \subseteq U\}$ je topológia na X a $\mathcal{B}$ je báza topológie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.*

Dôkaz. Zrejme $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Z (b1) vyplýva, že pre každé $a \in X$ existuje $V \in \mathcal{B}$ tak, že $a \in V \subseteq X$ a teda $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Nech $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ a $c \in U_1 \cap U_2$. Potom existujú $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ tak, že $c \in V_1 \subseteq U_1$ a súčasne $c \in V_2 \subseteq U_2$. Potom $c \in V_1 \cap V_2$ a podľa (b2) existuje $V_3 \in \mathcal{B}$, pre ktoré $c \in V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$. Potom, zrejme, $c \in V_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ a teda $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Nech teraz $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ a $U = \bigcup_{W \in \mathcal{C}} W$. Ak $c \in U$, tak existuje $W \in \mathcal{C}$ tak, že $c \in W$. Pretože $W \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, existuje $V \in \mathcal{B}$ tak že $c \in V \subseteq W$. Potom ale $c \in V \subseteq U$ a teda $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Ukázali sme, že $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ je topológia na X. Z definície $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ a z vety 2.2 vyplýva, že $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ je báza $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. $\square$

Teraz zavedieme pojem subbázy topológie, ktorý je všeobecnejší ako pojem bázy topológie.

Definícia 2.5. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva subbáza topológie $\mathcal{T}$, ak systém $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{V \in \mathcal{P}(X) : \exists_{k \in \mathbb{N}} \exists_{W_1, \ldots, W_k \in \mathcal{S}}\ V = \bigcap_{i=1}^{k} W_i\}$ je báza topológie $\mathcal{T}$.*

V predchádzajúcej definícii zrejme platí, že $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$.

Príklady 2.5. *1) Každá báza topológie je aj subbázou tejto topológie.*

2) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ je $\mathcal{S} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}$ subbáza topológie $\mathcal{T}_{nat}$.

3) V priestore $S = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ je $\mathcal{S} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ subbáza topológie $\mathcal{T}_S$.

4) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ je $\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \setminus \{a\} : a \in \mathbb{R}\}$ subbáza topológie $\mathcal{T}_{cof}$.

Podobne ako v prípade bázy, možno určovať topológiu aj pomocou subbázy. K tomu je užitočné vedieť, že platí:

Veta 2.5. *Ak $\mathcal{S}$ je subbáza topológie $\mathcal{T}$ priestoru $(X, \mathcal{T})$, tak platí:*
(s1) $\bigcup_{W \in \mathcal{S}} W = X$.

Dôkaz. Nech $a \in X$. Pretože $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{V \in \mathcal{P}(X) : \exists_{k \in \mathbb{N}} \exists_{W_1, \ldots, W_k \in \mathcal{S}}\ V = \bigcap_{i=1}^{k} W_i\}$ je báza topológie $\mathcal{T}$, existuje $V \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ tak, že $a \in V$. Pretože $V = \bigcap_{i=1}^{k} W_i$, platí $a \in W_1$ pričom $W_1 \in \mathcal{S}$. $\square$

Veta 2.6. *Nech X je množina a $\mathcal{S}$ je systém podmnožín množiny X taký, že $\bigcup_{W \in \mathcal{S}} W = X$ (t. j. spĺňajúci (s1) z predchádzajúcej vety). Potom $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall_{a \in U} \exists_{k \in \mathbb{N}} \exists_{W_1, \ldots, W_k \in \mathcal{S}}\ a \in \bigcap_{i=1}^{k} W_i \subseteq U\}$ je topológia na X, $\mathcal{S}$ je subbáza $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{V \in \mathcal{P}(X) : \exists_{k \in \mathbb{N}} \exists_{W_1, \ldots, W_k \in \mathcal{S}}\ V = \bigcap_{i=1}^{k} W_i\}$ je báza $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.*

Dôkaz. Systém $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{V \in \mathcal{P}(X) : \exists_{k \in \mathbb{N}} \exists_{W_1, \ldots, W_k \in \mathcal{S}}\ V = \bigcap_{i=1}^{k} W_i\}$ spĺňa podmienky (b1) a (b2) z vety 2.2 a podľa vety 2.3 je potom $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall_{a \in U} \exists_{V \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}}\ a \in V \subseteq U\}$ topológia na X a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ je báza $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$. Je zrejmé, že $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, a pretože $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ je báza $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{S}$ je subbáza $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. $\square$

Príklady 2.6. *1) Nech $(X, \leq)$ je usporiadaná množina, $X \neq \emptyset$. Nech pre každé $a \in X$ je $(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\}$ a $(\leftarrow, a) = \{x \in X : a > x\}$. Potom systém $\mathcal{S} = \{X\} \cup \{(\leftarrow, a) : a \in X\} \cup \{(a, \rightarrow) : a \in X\}$ je subbázou topológie $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, ktorá sa nazýva topológiou určenou usporiadaním $\leq$.*

2) Ak $\mathcal{C}$ je ľubovoľný systém podmnožín množiny X, tak $\mathcal{S} = \mathcal{C} \cup \{X\}$ je subbáza topológie $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ a $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ je najmenšia topológia obsahujúca systém $\mathcal{C}$.

Cvičenie 2.3. *Definujte pojem bázy a subbázy pre systém všetkých uzavretých podmnožín topologického priestoru a dokážte analogické výsledky k výsledkom o báze (subbáze) topológie.*

Definícia 2.6. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $A \subseteq X$.*
a) Množina $\overline{A}$ sa nazýva uzáver množiny A v $(X, \mathcal{T})$, ak platí:
1) $\overline{A}$ je uzavretá v $(X, \mathcal{T})$
2) $A \subseteq \overline{A}$
3) Ak B je uzavretá podmnožina v $(X, \mathcal{T})$ a $A \subseteq B$, tak $\overline{A} \subseteq B$

Veta 2.7. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $A \subseteq X$. Potom platí:*
a) $\overline{A} = \bigcap \{B \in \mathcal{P}(X) : B$ je uzavretá a $A \subseteq B\}$.
b) A je uzavretá v $(X, \mathcal{T})$ práve vtedy, keď $A = \overline{A}$.

Dôkaz. Cvičenie. $\square$

Príklad 2.1. *V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ platí: $\overline{(0,1)} = \overline{[0,1)} = [0,1]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$. V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ platí: $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$, $\overline{C} = \mathbb{R}$ práve vtedy, keď C je nekonečná.*

Definícia 2.7. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $M \subseteq X$.*

a) Podmnožina M sa nazýva hustá v $(X, \mathcal{T})$, ak $\overline{M} = X$.

b) Priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva separabilný, ak má spočítateľnú hustú podmnožinu.

Veta 2.8. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $\mathcal{B}$ je báza $\mathcal{T}$ a $M \subseteq X$. Potom M je hustá v $(X, \mathcal{T})$ práve vtedy, keď pre každý neprázdny prvok $V \in \mathcal{B}$ platí $M \cap V \neq \emptyset$.*

Dôkaz. Nech $V \in \mathcal{B}$ a $V \neq \emptyset$ a $V \cap M = \emptyset$. Potom $M \subseteq X \setminus V$, $X \setminus V$ je uzavretá a preto $\overline{M} \subseteq X \setminus V \neq X$. Teda M nie je hustá v $(X, \mathcal{T})$. Ak M nie je hustá v $(X, \mathcal{T})$, tak $X \setminus \overline{M}$ je neprázdna otvorená podmnožina v $(X, \mathcal{T})$ a preto existuje neprázdny prvok $V \in \mathcal{B}$ taký, že $V \subseteq X \setminus \overline{M}$. Potom, zrejme, $V \cap M = \emptyset$. $\square$

Veta 2.9. *1) Ak priestor $(X, \mathcal{T})$ má spočítateľnú bázu, tak je separabilný.*

2) Ak priestor $(X, \mathcal{T})$ je metrizovateľný, tak má spočítateľnú bázu práve vtedy, keď je separabilný.

Dôkaz. 1) Nech $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza $\mathcal{T}$, ktorá neobsahuje $\emptyset$. Pre každé $V \in \mathcal{B}$ vyberme prvok $a_V \in V$. Potom $M = \{a_V : V \in \mathcal{B}\}$ je spočítateľná hustá podmnožina v $(X, \mathcal{T})$ (podľa predchádzajúcej vety).

2) Nech d je metrika na X, pre ktorú $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}_d$ je topológia na X určená metrikou d) a M je spočítateľná hustá podmnožina v $(X, \mathcal{T})$. Nech $\mathcal{B} = \{O_{\frac{1}{n}}(a) : a \in M,\ n \in \mathbb{N}\}$. Ukážeme, že $\mathcal{B}$ je báza $\mathcal{T}$, ktorá je zrejme spočítateľná. Nech $U \in \mathcal{T}$, $c \in U$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $O_{\frac{2}{n}}(c) \subseteq U$. Pretože M je hustá a $O_{\frac{1}{n}}(c)$ je neprázdna a otvorená v $(X, \mathcal{T})$, môžeme vybrať $a \in O_{\frac{1}{n}}(c) \cap M$. Potom, zrejme, $O_{\frac{1}{n}}(a) \in \mathcal{B}$, $c \in O_{\frac{1}{n}}(a)$ a $O_{\frac{1}{n}}(a) \subseteq O_{\frac{2}{n}}(c) \subseteq U$. $\square$

Príklad 2.2. *Sorgenfreyova priamka S je separabilný priestor, ktorý nemá spočítateľnú bázu. Teda S nie je metrizovateľný priestor.*

Veta 2.10. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je priestor, A, B sú podmnožiny X. Potom platí:*

1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

2) $A \subseteq \overline{A}$.

3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dôkaz. Vlastnosti 1), 2) a 3) vyplývajú v vety 2.6 a definície 2.5.

4) Zrejme $A \subseteq \overline{A \cup B}$, $\overline{A \cup B}$ je uzavretá a preto $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. Podobne sa ukáže, že $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ a teda $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Ďalej, $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ je uzavretá a preto $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. $\square$

Veta 2.11. *Nech X je množina a $cl : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ je zobrazenie spĺňajúce nasledujúce podmienky:*

(cl1) $cl(\emptyset) = \emptyset$.

(cl2) Pre každé $A \in \mathcal{P}(X)$ platí $A \subseteq cl(A)$.

(cl3) Pre každé $A, B \in \mathcal{P}(X)$ platí $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$.

(cl4) Pre každé $A \in \mathcal{P}(X)$ platí $cl(cl(A) = cl(A)$.

Potom $\mathcal{T}_{cl} = \{U \in \mathcal{P}(X) : cl(X \setminus U) = X \setminus U\}$ *je topológia na* X *a pre každé* $A \in \mathcal{P}(X)$ *platí* $cl(A) = \overline{A}$ *v* $(X, \mathcal{T}_{cl})$.

Dôkaz. Zrejme $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{cl}$ a ak $U, V \in \mathcal{T}_{cl}$, tak aj $U \cap V \in \mathcal{T}_{cl}$. Nech $C \subseteq D \subseteq X$. Potom $D = C \cup (D \setminus C)$, a podľa (3) $cl(D) = cl(C) \cup cl(D \setminus C)$. Teda $cl(C) \subseteq cl(D)$. Nech teraz $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_{cl}$. Potom pre každé $U \in \mathcal{S}$ platí $cl(X \setminus U) = X \setminus U$ a tiež $cl(\bigcap_{V \in \mathcal{S}}(X \setminus V) \subseteq cl(X \setminus U)$ (lebo $\bigcap_{V \in \mathcal{S}}(X \setminus V) \subseteq X \setminus U)$. Potom $cl(X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U) = cl(\bigcap_{U \in \mathcal{S}}(X \setminus U)) \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{S}} cl(X \setminus U) = \bigcap_{U \in \mathcal{S}}(X \setminus U) = X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$ a preto $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}_{cl}$. Teda $\mathcal{T}_{cl}$ je topológia na X. Podmnožina A v priestore $(X, \mathcal{T}_{cl})$ je uzavretá práve vtedy, keď $X \setminus A \in \mathcal{T}_{cl}$, to je ekvivalentné s tým, že $cl(X \setminus (X \setminus A)) = X \setminus (X \setminus A)$ t. j. $cl(A) = A$. Nech $A \in \mathcal{P}(X)$. Potom $cl(cl(A) = cl(A)$, preto $cl(A)$ je uzavretá v $(X, \mathcal{T}_{cl})$ a teda $\overline{A} \subseteq cl(A)$. Pretože $A \subseteq \overline{A}$, platí $cl(A) \subseteq cl(\overline{A}) = \overline{A}$ (lebo $\overline{A}$ je uzavretá). Dokázali sme, že $cl(A) = \overline{A}$. □

Príklad 2.3. *Nech* $cl : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *je zobrazenie definované predpisom* $cl(A) = A$ *ak* A *je konečná a* $cl(A) = A \cup \{0\}$ *ak* A *je nekonečná množina. Zrejme cl spĺňa (cl1) - (cl4) a* $\mathcal{T}_{cl} = \mathcal{P}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : 0 \in V$ *a* $\mathbb{R} \setminus V$ *je konečná* $\}$.

Ďalším základným pojmom v topológii je pojem okolia bodu. Pred jeho zavedením je užitočné definovať pojem vnútro množiny.

Definícia 2.8. *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor,* $A \subseteq X$. *Množina* $int(A) = \bigcup\{V \in \mathcal{T} : V \subseteq A\}$ *sa nazýva vnútro množiny* A.

Je to teda najväčšia otvorená množina obsiahnutá v množine A. Pretože $\emptyset$ je vždy otvorená množina, množina $int(A)$ existuje pre každú podmnožinu topologického priestoru.

Veta 2.12. *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor,* $A, B \in \mathcal{P}(X)$. *Potom platí:*
1) $int(A)$ *je otvorená množina a* $int(A) \subseteq A$.
2) A *je otvorená v* $(X, \mathcal{T})$ *práve vtedy, keď* $int(A) = A$.
3) Ak $A \subseteq B$, *tak* $int(A) \subseteq int(B)$.
4) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$.

Dôkaz. 4) Podľa 3) $int(A \cap B) \subseteq int(A)$, $int(A \cap B) \subseteq int(B)$ a preto $int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(B)$. Ďalej, podľa 1) je $int(A) \cap int(B) \subseteq A \cap B$, $int(A) \cap int(B)$ je otvorená a preto $int(A) \cap int(B) \subseteq int(A \cap B)$. □

Príklad 2.4. *V priestore* S $int([0,1]) = [0,1)$, $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$. *V priestore* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ $int([0,1]) = \emptyset$.

Cvičenie 2.4. *Dokážte, že pre každú podmnožinu* A *topologického priestoru* $(X, \mathcal{T})$ *platí* $int(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$.

Definícia 2.9. *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor,* $a \in X$. *Množina* $V \in \mathcal{P}(X)$ *sa nazýva okolie bodu* a *v priestore* $(X, \mathcal{T})$, *ak existuje* $U \in \mathcal{T}$ *tak, že* $a \in U$ *a* $U \subseteq V$. *Systém všetkých okolí bodu* a *v* $(X, \mathcal{T})$ *označíme* $\mathcal{N}(a)$.

Príklady 2.7. *1) V priestore* $\mathbb{R}$ *sú množiny* $(-1,1)$*,* $[-1,1]$*,* $[-1,\infty)$*,* $(-1,1]\cup\mathbb{N}$ *okolia bodu* 0*,* $[0,1]$ *nie je okolie bodu* 0*.*

2) Ak V *je okolie bodu* a *v* $(X,\mathcal{T})$*, tak aj* $int(V)$ *je (otvorené) okolie bodu* a*.*

3) Ak (X,d) *je metrický priestor,* $a\in X$*,* $\varepsilon>0$*, tak* $0_\varepsilon(a)$ *je okolie bodu* a*.*

Podobne, ako topológiu je možné často nahradiť bázou topológie, možno systém všetkých okolí bodu a v topologickom priestore často plnohodnotne nahradiť bázou okolí.

Definícia 2.10. *a) Nech* $(X,\mathcal{T})$ *je topologický priestor,* $a\in X$*. Systém* $\mathcal{B}(a)\subseteq\mathcal{N}(a)$ *sa nazýva báza okolí bodu* a *v* $(X,\mathcal{T})$*, ak pre každé* $V\in\mathcal{N}(a)$ *existuje* $W\in\mathcal{B}(a)$ *tak, že* $W\subseteq V$*.*

b) Hovoríme, že priestor $(X,\mathcal{T})$ *spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti, ak pre každý bod* $a\in X$ *existuje spočítateľná báza okolí.*

Príklady 2.8. *1) Nech* (X,d) *je metrický priestor,* $a\in X$*. Potom* $\mathcal{B}(a)=\{O_\varepsilon(a):\varepsilon>0\}$ *aj* $\mathcal{B}_1(a)=\{O_{\frac{1}{n}}(a):n\in\mathbb{N}\}$ *sú bázy okolí bodu* a *v priestore* $(X,\mathcal{T}_d)$*, pričom* $\mathcal{B}_1(a)$ *je spočítateľná. Teda každý metrizovateľný priestor spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti.*

2) V priestore $S=(\mathbb{R},\mathcal{T}_S)$ *je pre každé* $a\in\mathbb{R}$ $\mathcal{B}(a)=\{[a,a+\frac{1}{n}):n\in\mathbb{N}\}$ *spočítateľná báza okolí.*

3) V každom priestore $(X,\mathcal{T}_{dis})$ *je pre každé* $a\in X$ $\{\{a\}\}$ *báza okolí bodu* a*.*

4) V priestore $(X,\mathcal{T})$ *je pre každé* $a\in X$ *systém všetkých otvorených okolí bodu* a *bázou okolí bodu* a*. Ak* $\mathcal{B}(a)$ *je báza okolí bodu* a*, tak aj* $\{int(V):V\in\mathcal{B}(a)\}$ *je báza okolí bodu* a*, pričom všetky okolia v tejto báze okolí sú otvorené množiny.*

5) Priestor $(\mathbb{R},\mathcal{T})$*, kde* $\mathcal{T}=\mathcal{P}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{V\in\mathcal{P}(\mathbb{R}):0\in V$ *a* $\mathbb{R}\setminus V$ *je konečná* $\}$ *nemá spočítateľnú bázu okolí bodu* 0*. Skutočne, nech* $\{V_n:n\in\mathbb{N}\}$ *je spočítateľná báza okolí bodu* 0 *a* $A_n=\mathbb{R}\setminus V_n$*. Potom všetky* A_n *sú konečné a ich zjednotenie je spočítateľná množina. Potom* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ *je nespočítateľná množina a preto obsahuje bod* a *rôzny od* 0*. Množina* $U=\mathbb{R}\setminus\{a\}$ *je okolie bodu* 0 *a pretože všetky* V_n *obsahujú bod* a *a* $a\notin U$ *platí, že pre všetky* $n\in\mathbb{N}$ V_n *nie je podmnožinou* U*. Dostali sme spor.*

Podobne sa ukáže, že v priestore $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{cof})$ *nemá žiadny bod spočítateľnú bázu okolí.*

6) V každom priestore $(X,\mathcal{T})$ *je pre každé* a *systém* $\mathcal{N}(a)$ *všetkých okolí* a *bázou okolí bodu* a*.*

V nasledujúcej vete si všimneme vzťah medzi bázou topológie a bázami okolí bodov.

Veta 2.13. *a) Ak* $\mathcal{B}$ *je báza topológie v priestore* $(X,\mathcal{T})$*, tak pre každé* $a\in X$ *je* $\mathcal{B}(a)=\{V\in\mathcal{B}:a\in V\}$ *báza okolí bodu* a*.*

b) Ak pre každé $a\in X$ *je* $\mathcal{B}(a)$ *báza okolí bodu* a *v priestore* $(X,\mathcal{T})$ *a* $\mathcal{B}(a)\subseteq\mathcal{T}$*, tak* $\mathcal{B}=\bigcup_{a\in X}\mathcal{B}(a)$ *je báza topológie* $\mathcal{T}$*.*

Dôkaz. a) Pretože $\mathcal{B}(a) \subseteq \mathcal{T}$, všetky prvky $\mathcal{B}(a)$ sú okolia bodu a. Nech W je okolie bodu a v $(X, \mathcal{T})$. Potom existuje $U \in \mathcal{T}$ tak, že $a \in U$ a $U \subseteq W$. Z vlastností bázy topológie dostávame, že existuje $V \in \mathcal{B}$ tak, že $a \in V$ a $V \subseteq U$. Potom $V \in \mathcal{B}(a)$ a $V \subseteq W$. Teda $\mathcal{B}(a)$ je báza okolí bodu a v $(X, \mathcal{T})$.

b) Zrejme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Nech $U \in \mathcal{T}$ a $a \in U$. Potom U je okolie bodu a a existuje $V \in \mathcal{B}(a) \subseteq \mathcal{B}$ tak, že $V \subseteq U$. Zrejme tiež platí, že $a \in V$. □

Dôsledok 2.1. *a) Ak priestor $(X, \mathcal{T})$ má spočítateľnú bázu, tak $(X, \mathcal{T})$ spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti.*

b)Ak pre každé $a \in X$ je $\mathcal{B}(a)$ báza okolí bodu a a $\mathcal{B}_1(a) = \{int(V) : V \in \mathcal{B}(a)\}$, tak $\bigcup_{a \in X} \mathcal{B}_1(a)$ je báza topológie $\mathcal{T}$.

Pomocou bázy okolí bodu je možné tiež zistiť, či daný bod patrí alebo nepatrí do uzáveru niektorej množiny.

Veta 2.14. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je priestor, $a \in X$, $\mathcal{B}(a)$ je báza okolí bodu a a $B \subseteq X$. Potom $a \in \overline{B}$ práve vtedy, keď pre každé $V \in \mathcal{B}(a)$ je $V \cap B \neq \emptyset$.*

Dôkaz. Nech existuje $V \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $V \cap B = \emptyset$. Zrejme $a \in int(V)$ a $B \subseteq X \backslash V \subseteq X \backslash int(V)$. Pretože $X \backslash int(V)$ je uzavretá v $(X, \mathcal{T})$, platí $\overline{B} \subseteq X \backslash int(V)$ a preto $a \notin \overline{B}$. Obrátene, nech $a \notin \overline{B}$. Potom $a \in X \backslash \overline{B}$, $X \backslash \overline{B}$ je otvorená a preto je okolím bodu a. Potom existuje $V \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $V \subseteq X \backslash \overline{B} \subseteq X \backslash B$ a preto $V \cap B = \emptyset$. □

Príklad 2.5. *Pretože priestor $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ z príkladov 2.8.5) a priestor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ nespĺňajú 1. axiómu spočítateľnosti nemajú ani spočítateľnú bázu. Priestor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ je separabilný.*

Podobne, ako v prípade bázy topológie, je možné definovať topológiu na množine pomocou báz okolí. K tomu potrebujeme vedieť ich vlastnosti.

Veta 2.15. *Nech pre každé $a \in X$ je $\mathcal{B}(a)$ báza okolí bodu a v priestore $(X, \mathcal{T})$. Potom platí:*

(bo1) Pre každé $a \in X$ je $\mathcal{B}(a) \neq \emptyset$.

(bo2) Ak $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(a)$, tak existuje $V_3 \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

(bo3) Ak $V \in \mathcal{B}(a)$, tak existuje $U \in \mathcal{P}(X)$,tak, že $a \in U$, $U \subseteq V$ a pre každé $b \in U$ existuje $W \in \mathcal{B}(b)$, pre ktoré $W \subseteq U$.

(bo4) $U \in \mathcal{T}$ práve vtedy, keď pre každé $c \in U$ existuje $V \in \mathcal{B}(c)$ tak, že $V \subseteq U$.

Ak naviac $\mathcal{B}(a) \subseteq \mathcal{T}$ pre každé $a \in X$, tak platí

(bo3') Ak $V \in \mathcal{B}(a)$, tak $a \in V$ a pre každé $b \in V$ existuje $W \in \mathcal{B}(b)$, pre ktoré $W \subseteq V$.

Dôkaz. Platnosť (bo1) je zrejmá. (bo2) vyplýva z toho,že $V_1 \cap V_2$ je okolie a.

(bo3) V je okolie a, preto existuje $U \in \mathcal{T}$ tak, že $a \in U \subseteq V$. Pre každé $b \in U$ je U okolie b, preto existuje $W \in \mathcal{B}(b)$ tak, že $W \subseteq U$.

(bo4) Nech $U \in \mathcal{T}$ a $c \in U$. Potom U je okolie c a teda existuje $V \in \mathcal{B}(c)$ tak že $V \subseteq U$. Obrátene, nech $U \subseteq X$ a pre každé $c \in U$ existuje $V_c \in \mathcal{B}(c)$

tak, že $V_c \subseteq U$. Potom $c \in int(V_c) \subseteq V_c \subseteq U$, $int(V_c)$ je otvorená. Zrejme $U = \bigcup_{c \in U} int(V_c)$ a preto $U \in \mathcal{T}$.

(bo3') vyplýva z toho, že pre každé $b \in V$ je V okolie b. $\square$

Nasledujúca veta opisuje spôsob definovania topológie pomocou báz okolí.

Veta 2.16. *Nech X je množina, pre každé $a \in X$ je daný systém $\mathcal{B}(a)$ podmnožín množiny X tak, že sú splnené podmienky (bo1), (bo2)a (bo3) z predchádzajúcej vety. Potom $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) :$ pre každé $a \in U$ existuje $V \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $V \subseteq U$ $\}$ je topológia na X a pre každé $a \in X$ je $\mathcal{B}(a)$ báza okolí bodu a v priestore $(X, \mathcal{T})$. Ak podmienku (bo3) nahradíme podmienkou (bo3') z predchádzajúcej vety, tak naviac platí, že $\mathcal{B}(a) \subseteq \mathcal{T}$ pre všetky $a \in X$.*

Dôkaz. Je zrejmé, že $\emptyset \in \mathcal{T}$, z (bo1) vyplýva, že $X \in \mathcal{T}$ a ak $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, tak aj $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}$. Nech $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ a $a \in U_1 \cap U_2$. Potom existujú $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(a)$, pre ktoré $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$. Podľa (bo3) existuje $V_3 \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Teda $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Ukázali sme, že $\mathcal{T}$ je topológia na X. Nech teraz $a \in X$ a $V \in \mathcal{B}(a)$. Podľa (bo3) a definície $\mathcal{T}$ existuje $U \in \mathcal{T}$ tak, že $a \in U$ a $U \subseteq V$. Teda každé $V \in \mathcal{B}(a)$ je okolie a ($\mathcal{B}(a) \subseteq \mathcal{N}(a)$ v $(X, \mathcal{T})$). Nech W je ľubovoľné okolie a v $(X, \mathcal{T})$. Potom existuje $U \in \mathcal{T}$ tak, že $a \in U$ a $U \subseteq W$. Podľa definície $\mathcal{T}$ existuje $V \in \mathcal{B}(a)$, pre ktoré $V \subseteq U \subseteq W$. Teda $\mathcal{B}(a)$ je báza okolí bodu a v $(X, \mathcal{T})$. Zvyšok je zrejmý. $\square$

V nasledujúcich dvoch príkladoch je topológia daná pomocou báz okolí.

Príklad 2.6. *Priestor K bude definovaný na množine $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Nech $(a, b) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Ak $b > 0$, tak $\mathcal{B}(a, b) = \{O_\varepsilon(a, b) : \varepsilon > 0\}$, kde $O_\varepsilon(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < \varepsilon\}$. Ak $b = 0$, tak $\mathcal{B}(a, 0) = \{K_\varepsilon(a, 0) : \varepsilon > 0\}$, kde $K_\varepsilon(a, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : \sqrt{(a-x)^2 + y^2} < \varepsilon\} \cup \{(a, 0)\}$. Systém $\{\mathcal{B}(a, b) : (a, b) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)\}$ spĺňa podmienky (bo1), (bo2) aj (bo3') a určuje topológiu $\mathcal{T}_K$ na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ takú, že pre každé $(a, b) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ je $\mathcal{B}(a, b)$ báza okolí bodu (a, b) v priestore $K = (\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathcal{T}_K)$, pričom $\mathcal{B}(a, b) \subseteq \mathcal{T}_K$.*

Príklad 2.7. *Mooreova rovina M je priestor definovaný na množine $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Nech $(a, b) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Ak $b > 0$, tak $\mathcal{B}(a, b) = \{O_\varepsilon(a, b) : \varepsilon > 0\}$, kde $O_\varepsilon(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < \varepsilon\}$. Ak $b = 0$, tak $\mathcal{B}(a, 0) = \{L_\varepsilon(a, 0) : \varepsilon > 0\}$, kde $L_\varepsilon(a, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times ([0, \infty) : \sqrt{(a-x)^2 + (y-\varepsilon)^2} < \varepsilon\} \cup \{(a, 0)\}$. Ľahko sa overí, že systém $\{\mathcal{B}(a, b) : (a, b) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)\}$ spĺňa podmienky (bo1), (bo2) aj (bo3') a určuje topológiu $\mathcal{T}_M$ na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ takú, že pre každé $(a, b) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ je $\mathcal{B}(a, b)$ báza okolí bodu (a, b) v priestore $M = (\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathcal{T}_M)$, pričom $\mathcal{B}(a, b) \subseteq \mathcal{T}_M$.*

3 Podpriestory

Ak v topologickom priestore zvolíme ľubovoľnú podmnožinu, tak je na nej možné prirodzeným spôsobom definovať topológiu pomocou topológie uvažovaného priestoru.

Veta a definícia 3.1. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $Y \subseteq X$. Potom $\mathcal{T}|_Y = \{V \in \mathcal{P}(Y) : \exists_{U \in \mathcal{T}} V = U \cap Y\}$ je topológia na Y a teda $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ je topologický priestor. Priestor $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ sa nazýva podpriestorom topologického priestoru $(X, \mathcal{T})$.*

Dôkaz. Zrejme $\emptyset, Y \in \mathcal{T}|_Y$. Ak $V_1, V_2 \in \mathcal{T}|_Y$, tak existujú $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ také, že $V_1 = U_1 \cap Y$, $V_2 = U_2 \cap Y$. Potom $V_1 \cap V_2 = U_1 \cap U_2 \cap Y$, pričom $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Teda $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}|_Y$. Nech $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{T}|_Y$. Pre každé $V \in \mathbb{C}$ vyberme $U_V \in \mathcal{T}$, pre ktoré $V = U_V \cap Y$. Nech $W = \bigcup_{V \in \mathbb{C}} V$ a $U = \bigcup_{V \in \mathbb{C}} U_V$. Potom $U \in \mathcal{T}$ a $W = U \cap Y$. Teda $W \in \mathcal{T}|_Y$.

□

Príklady 3.1. *1) Nech Y je podpriestor priestoru $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ určený množinou $[0, 1)$. Potom $[0, \frac{1}{2})$ je otvorená podmnožina v Y a nie je to otvorená podmnožina v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, $[\frac{1}{2}, 1)$ je uzavretá podmnožina v Y a nie je to uzavretá podmnožina v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$.*

2) Ak Y je otvorený podpriestor priestoru X, a $U \subseteq Y$ je otvorená v Y, tak je otvorená aj v X. Ak Z je uzavretý podpriestor priestoru X a $A \subseteq Z$ je uzavretá v Z, tak A je uzavretá aj v X.

3) Ak Y je podpriestor X a Z je podpriestor Y, tak Z je podpriestor X.

Veta 3.1. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ je podpriestor priestoru $(X, \mathcal{T})$. Potom platí:*

1) Podmnožina $B \subseteq Y$ je uzavretá v $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ práve vtedy, keď existuje uzavretá podmnožina C priestoru $(X, \mathcal{T})$ taká, že $B = C \cap Y$.

2) Pre každé $D \subseteq Y$ platí $\overline{D}^Y = \overline{D}^X \cap Y$ ($\overline{D}^Y$ je uzáver D v $(Y, \mathcal{T}|_Y)$, $\overline{D}^X$ je uzáver D v $(X, \mathcal{T})$).

3) Ak $\mathcal{B}$ je báza (subbáza) topológie v priestore $(X, \mathcal{T})$, tak $\mathcal{B}_Y = \{V \in \mathcal{P}(Y) : \exists_{U \in \mathcal{B}} V = U \cap Y\}$ je báza (subbáza) topológie v priestore $(Y, \mathcal{T}|_Y)$.

4) Ak $a \in Y$ a $\mathcal{B}(a)$ je báza okolí bodu a v $(X, \mathcal{T})$, tak $\mathcal{B}(a)^Y = \{V \in \mathcal{P}(Y) : \exists_{U \in \mathcal{B}(a)} V = U \cap Y\}$ je báza okolí bodu a v $(Y, \mathcal{T}|_Y)$.

Dôkaz. 1) - zrejmý.

2) Podľa 1) je $\overline{D}^X \cap Y$ uzavretá v $(Y, \mathcal{T}|_Y)$, $D \subseteq \overline{D}^X \cap Y$ a preto $\overline{D}^Y \subseteq \overline{D}^X \cap Y$. Množina $\overline{D}^Y$ je uzavretá v $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ a podľa 1) existuje uzavretá množina C v $(X, \mathcal{T})$ taká, že $\overline{D}^Y = C \cap Y$. Zrejme $D \subseteq \overline{D}^Y \subseteq C$ a pretože C je uzavretá v $(X, \mathcal{T})$, platí $\overline{D}^X \subseteq C$. Potom $\overline{D}^X \cap Y \subseteq C \cap Y = \overline{D}^Y$. Dokázali sme, že $\overline{D}^Y = \overline{D}^X \cap Y$.

3) Pretože $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, platí aj $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{T}|_Y$. Nech W je otvorená množina v $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ a $a \in W$. Potom existuje $U \in \mathcal{T}$ taká, že $W = U \cap Y$. Zrejme $a \in U$ a existuje $V \in \mathcal{B}$ taká, že $a \in V \subseteq U$. Potom $V \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ pričom $a \in V \cap Y \subseteq U \cap Y = W$. Teda $\mathcal{B}_Y$ je báza $\mathcal{T}|_Y$.

4) Podobne ako 3). □

Dôsledok 3.1. *Každý podpriestor priestoru so spočítateľnou bázou (spĺňajúceho 1. axiómu spočítateľnosti) má spočítateľnú bázu (spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti).*

Cvičenie 3.1. *1) Dokážte, že každý podpriestor metrizovateľného priestoru je metrizovateľný priestor.*

2) Ukážte na príklade, že podpriestor separabilného priestoru nemusí byť separabilný (je možné použiť priestor K z príkladu 2.6 alebo M z príkladu 2.7).

4 Spojité zobrazenia

Spojité zobrazenia sú zobrazenia medzi topologickými priestormi, ktoré zachovávajú ich topologickú štruktúru.

Definícia 4.1. *Nech X, Y sú topologické priestory.*

a) Zobrazenie $f: X \longrightarrow Y$ sa nazýva spojité v bode $a \in X$, ak pre každé okolie V bodu $f(a)$ v priestore Y existuje okolie U bodu a v X také, že $f[U] \subseteq V$.

b) Zobrazenie $f: X \longrightarrow Y$ sa nazýva spojité, ak je spojité v každom bode a priestoru X.

c) Zobrazenie $f: X \longrightarrow Y$ sa nazýva homeomorfizmus, ak je spojité, bijektívne a zobrazenie $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ je tiež spojité.

Príklady 4.1. *1) Každé konštantné zobrazenie topologického priestoru X do topologického priestoru Y je spojité.*

2) Ak X je ľubovoľný a Y je indiskrétny topologický priestor, tak každé zobrazenie $f: X \longrightarrow Y$ je spojité.

3) Ak X je diskrétny a Y je ľubovoľný topologický priestor, tak každé zobrazenie $f: X \longrightarrow Y$ je spojité.

4) Nech (X, d_X), (Y, d_Y) sú metrické priestory. Potom zobrazenie $f: (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ je spojité zobrazenie metrického priestoru (X, d_X) do metrického priestoru (Y, d_Y) práve vtedy, keď $f: (X, \mathcal{T}_{d_X}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_{d_Y})$ je spojité zobrazenie topologického priestoru $(X, \mathcal{T}_{d_X})$ do topologického priestoru $(Y, \mathcal{T}_{d_Y})$. ($\mathcal{T}_{d_X}$ ($\mathcal{T}_{d_Y}$) je topológia určená metrikou d_X (d_Y)).

5) Pre každý topologický priestor X je zobrazenie $id_X: X \longrightarrow X$ definované predpisom $id_X(a) = a$ homeomorfizmus.

6) Zobrazenie $id_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ definované predpisom $id_{\mathbb{R}}(a) = a$ nie je spojité, zobrazenie $id_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ je spojité.

7) Zobrazenie $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ je spojité práve vtedy, keď zobrazenie $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ je polospojité zhora.

V nasledujúcej vete sú uvedené podmienky ekvivalentné s definíciou spojitosti, ktoré zodpovedajú rôznym možným spôsobom definovania topológie.

Veta 4.1. *Nech X, Y sú topologické priestory, pre každé $a \in X$ je daná báza okolí $\mathcal{B}^X(a)$ bodu a v X, pre každé $b \in Y$ je daná báza okolí $\mathcal{B}^Y(b)$ bodu b v Y a $f: X \longrightarrow Y$ je zobrazenie. Potom sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*

1) Zobrazenie $f: X \longrightarrow Y$ je spojité.

2) Pre každú otvorenú podmnožinu V priestoru Y je $f_{-1}[V]$ otvorená podmnožina priestoru X.

3) Pre každú uzavretú podmnožinu B priestoru Y je $f_{-1}[B]$ uzavretá podmnožina priestoru X.

4) Pre každú podmnožinu A priestoru X platí $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

5) Pre každé $a \in X$ a každé $V \in \mathcal{B}^Y(f(a))$ existuje $U \in \mathcal{B}^X(a)$ také, že $f[U] \subseteq V$.

Dôkaz. 1) $\Rightarrow$ 2): Nech V je otvorená podmnožina v Y a $c \in f_{-1}[V]$. Potom $f(c) \in V$ a V je okolie $f(c)$ v Y. Podľa 1) existuje okolie U_c bodu c v X také, že $U_c \subseteq f_{-1}[V]$. Teda množina $f_{-1}[V]$ obsahuje s každým svojim prvkom aj nejaké jeho okolie a preto je otvorená v X.

2) $\Rightarrow$ 3): Nech B je uzavretá v Y. Potom $Y \setminus B$ je otvorená v X a preto $f_{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f_{-1}[B]$ je otvorená v X. Potom ale $f_{-1}[B]$ je uzavretá v X.

3) $\Rightarrow$ 4): Nech A je podmnožina X. Potom $A \subseteq f_{-1}[f[A]] \subseteq f_{-1}[\overline{f[A]}]$. Množina $\overline{f[A]}$ je uzavretá v Y a preto (podľa 3)) je $f_{-1}[\overline{f[A]}]$ uzavretá v X. Potom $\overline{A} \subseteq f_{-1}[\overline{f[A]}]$ a teda $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

4) $\Rightarrow$ 5): Sporom. Nech existuje $a \in X$ a $V \in \mathcal{B}^Y(f(a))$ také, že pre každé $U \in \mathcal{B}^X(a)$ $f[U] \not\subseteq V$ a a to znamená, že $U \not\subseteq f_{-1}[V]$. Teda pre každé $U \in \mathcal{B}^X(a)$ platí $U \cap (X \setminus f_{-1}[V] \neq \emptyset$ a preto $a \in \overline{X \setminus f_{-1}[V]}$. Potom, podľa 4), $f(a) \in f[\overline{X \setminus f_{-1}[V]}] \subseteq \overline{f[X \setminus f_{-1}[V]]} \subseteq \overline{Y \setminus V} \subseteq \overline{Y \setminus int_Y V} = Y \setminus int_Y V$. Teda $f(a) \notin int_Y V$, pričom V je okolie $f(a)$ v Y. Dostali sme spor.

5) $\Rightarrow$ 1) Zrejmé (stačí za bázy okolí zobrať systémy všetkých okolí). $\square$

Veta 4.2. *Ak $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ sú spojité zobrazenia (homeomorfizmy), tak aj $g \circ f: X \longrightarrow Z$ je spojité zobrazenie (homeomorfizmus).*

Dôkaz. Nech W je otvorená podmnožina priestoru Z Potom $g_{-1}[W]$ je otvorená podmnožina Y (lebo g je spojité). Pretože f je spojité dostávame, že $f_{-1}[g_{-1}[W]] = (g \circ f)_{-1}[W]$ je otvorená v X. Teda $g \circ f$ je spojité zobrazenie. $\square$

Nasledujúca veta je jednou z ilustrácií významu bázy a subbázy topológie.

Veta 4.3. *Nech X, Y sú topologické priestory, $\mathcal{B}$ je báza topológie priestoru Y, $\mathcal{S}$ je subbáza topológie priestoru Y a $f: X \longrightarrow Y$ je zobrazenie. Potom sú ekvivalentné nasledujúce výroky:*

1) $f: X \longrightarrow Y$ je spojité zobrazenie.

2) Pre každé $V \in \mathcal{B}$ je $f_{-1}[V]$ otvorená množina v X.

3) Pre každé $W \in \mathcal{S}$ je $f_{-1}[W]$ otvorená množina v X.

Dôkaz. 1) $\Rightarrow$ 2): Zrejmé.

2) $\Rightarrow$ 3): Nech $W \in \mathcal{S}$ a $c \in f_{-1}[W]$. Potom existuje $V \in \mathcal{B}$ také, že $f(c) \in V \subseteq W$ (W je otvorená v Y). Podľa 2) je $f_{-1}[V]$ otvorená v X a $c \in f_{-1}[V] \subseteq f_{-1}[W]$. Teda $f_{-1}[W]$ obsahuje s každým bodom aj nejaké jeho okolie a preto je otvorená v X.

3) $\Rightarrow$ 1): Nech U je otvorená v Y a $c \in f_{-1}[U]$. Potom $f(c) \in U$ a existujú $W_1, \ldots, W_k \in \mathcal{S}$ ($k \in \mathbb{N}$) také, že $f(c) \in \bigcap_{i=1}^k W_i \subseteq U$. Potom $c \in f_{-1}[\bigcap_{i=1}^k W_i] = \bigcap_{i=1}^k f_{-1}[W_i] \subseteq U$, pričom $\bigcap_{i=1}^k f_{-1}[W_i]$ je otvorená v X a preto je to okolie bodu c v X. Teda $f_{-1}[U]$ je otvorená v X. $\square$

Príklad 4.1. *Nech* $\mathcal{T}_+ = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ *je horná a* $\mathcal{T}_- = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ *je dolná topológia na* $\mathbb{R}$*. Zobrazenie* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ *sa nazýva polospojité zhora (zdola), ak* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ *(*$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_-)$*) je spojité. Pretože* $\mathcal{S} = \mathcal{T}_- \cup \mathcal{T}_+$ *je subbáza topológie* $\mathcal{T}_{nat}$*, platí: Zobrazenie* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ *je spojité práve vtedy, keď* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ *je súčasne polospojité zhora aj zdola.*

Nasledujúca veta hovorí o tom, ako ovplyvní spojitosť zobrazenia $f : X \longrightarrow Y$ zúženie jeho definičného oboru na nejaký podpriestor priestoru X, resp. zúženie jeho oboru hodnôt na podpriestor priestoru Y obsahujúci množinu $f[X]$.

Veta 4.4. *Nech* X*,* Y *sú topologické priestory,* $f : X \longrightarrow Y$ *je zobrazenie,* K *je podpriestor priestoru* X *a* L *je podpriestor priestoru* Y *taký, že* $f[X] \subseteq L$*. Potom platí:*

1) Ak $f : X \longrightarrow Y$ *je spojité zobrazenie, tak aj* $f|_K : K \longrightarrow Y$ *je spojité zobrazenie.*

2) Zobrazenie $f : X \longrightarrow Y$ *je spojité práve vtedy, keď zobrazenie* $g : X \longrightarrow L$ *dané predpisom* $g(a) = f(a)$ *pre všetky* $a \in X$ *je spojité.*

Dôkaz. 1) Nech V je otvorená podmnožina priestoru Y. Potom $f_{-1}[V]$ je otvorená podmnožina v X a $(f|_K)_{-1}[V] = f_{-1}[V] \cap K$ je otvorená v K. Teda $f|_K$ je spojité.

2) $\Rightarrow$: Nech W je otvorená podmnožina priestoru L. Potom existuje otvorená podmnožina V priestoru Y taká, že $V \cap Y = W$. Potom $g_{-1}[W] = g_{-1}[V \cap L] = f_{-1}[V \cap L] = f_{-1}[V] \cap f_{-1}[L] = f_{-1}[V] \cap X = f_{-1}[V]$ je otvorená v X a teda g je spojité.

$\Leftarrow$: Nech V je otvorená podmnožina priestoru Y. Potom $W = V \cap L$ je otvorená podmnožina v L a $f_{-1}[V] = g_{-1}[W]$ je otvorená podmnožina v X. Teda f je spojité. $\square$

Ak X, Y sú topologické priestory, $f : X \longrightarrow Y$ je zobrazenie a A je podmnožina X, tak hovoríme, že $f : X \longrightarrow Y$ je spojité na A, ak je spojité v každom bode $c \in A$. Je zrejmé, že ak $f : X \longrightarrow Y$ je spojité na A, tak $f|_A : A \longrightarrow Y$ je spojité (A tu chápeme ako podpriestor X). Obrátene to neplatí, napríklad pre zobrazenie $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ definované predpisom $f(x) = 1$ pre $x \in \mathbb{Q}$ a $f(x) = 0$ pre $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ platí, že f nie je spojité v žiadnom bode $c \in \mathbb{Q}$ a $f|_{\mathbb{Q}}$ je spojité.

Veta 4.5. *Nech* $f : X \longrightarrow Y$ *je zobrazenie priestoru* X *do priestoru* Y *a* $\mathcal{U}$ *je systém otvorených podpriestorov priestoru* X *taký, že* $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$*. Potom* $f : X \longrightarrow Y$ *je spojité práve vtedy, keď pre každé* $U \in \mathcal{U}$ *je zobrazenie* $f|_U : U \longrightarrow Y$ *spojité.*

Dôkaz. $\Rightarrow$: Vyplýva z predchádzajúcej vety.

$\Leftarrow$: Nech V je otvorená podmnožina v Y. Potom $f_{-1}[V] = \bigcup_{U \in \mathcal{U}}(f_{-1}[V] \cap U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}}(f|_U)_{-1}[V]$. Pretože pre každé $U \in \mathcal{U}$ je $(f|_U)_{-1}[V]$ otvorená podmnožina v U a preto aj v X, dostávame, že $f_{-1}[V]$ je otvorená podmnožina v X. Teda $f : X \longrightarrow Y$ je spojité zobrazenie. $\square$

Veta 4.6. *Nech* $f: X \longrightarrow Y$ *je zobrazenie priestoru* X *do priestoru* Y *a* $\mathcal{V}$ *je konečný systém uzavretých podpriestorov priestoru* X *taký, že* $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X$. *Potom* $f: X \longrightarrow Y$ *je spojité práve vtedy, keď pre každé* $V \in \mathcal{V}$ *je zobrazenie* $f|_V: V \longrightarrow Y$ *spojité.*

Dôkaz. Podobný ako v predchádzajúcej vete. □

Príklad 4.2. *Zobrazenie* $f: (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definované predpisom* $f(x) = \frac{1}{x-1}$ *pre* $x \in [\frac{1}{2}, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$ *pre* $x \in (-1, -\frac{1}{2}]$ *a* $f(x) = -4x$ *pre* $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *je zrejme bijektívne a spojité na uzavretých podpriestoroch* $[\frac{1}{2}, 1)$, $(-1, -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *a preto je spojité. Inverzné zobrazenie* $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ *je definované predpisom* $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x}$ *pre* $x \in (-\infty, -2]$, $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4}$ *pre* $x \in [-2, 2]$ *a* $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x}$ *pre* $x \in [2, \infty)$ *je zrejme tiež spojité. Teda* $f: (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *je homeomorfizmus.*

Definícia 4.2. *Zobrazenie* $f: X \longrightarrow Y$ *priestoru* X *do priestoru* Y *sa nazýva otvorené (uzavreté), ak pre každú otvorenú (uzavretú) podmnožinu* U *priestoru* X *je* $f[U]$ *otvorená (uzavretá) podmnožina priestoru* Y.

Zobrazenie $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definované predpisom $f(x) = 0$ pre všetky x je spojité, uzavreté a nie je otvorené. Zobrazenie $g: (\frac{1}{2}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dané predpisom $g(x) = \frac{1}{x}$ je spojité, otvorené a nie je uzavreté. Zobrazenie $h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ dané predpisom $h(x) = x$ je spojité a nie je ani otvorené ani uzavreté.

Veta 4.7. *Nech* $\mathcal{B}$ *je báza topológie priestoru* X, Y *je priestor a* $f: X \longrightarrow Y$ *je zobrazenie. Potom* f *je otvorené práve vtedy, keď pre každé* $V \in \mathcal{B}$ *je* $f[V]$ *otvorená podmnožina priestoru* Y.

Dôkaz. Cvičenie. □

Cvičenie 4.1. *Ukážte, že ak v predchádzajúcej vete nahradíme bázu topológie priestoru* X *subbázou topológie, tak dostaneme nepravdivý výrok.*

Veta 4.8. *Zobrazenie medzi topologickými priestormi je homeomorfizmus práve vtedy, keď je bijektívne, spojité a otvorené (uzavreté).*

Dôkaz. Zrejmý. □

Definícia 4.3. *Zobrazenie* $f: X \longrightarrow Y$ *priestoru* X *do priestoru* Y *sa nazýva vloženie (alternatívne aj vnorenie) ak* $f: X \longrightarrow f[X]$ *je homeomorfizmus priestoru* X *na podpriestor* $f[X]$ *priestoru* Y.

Napríklad, ak X je podpriestor priestoru Y, tak zobrazenie $j: X \longrightarrow Y$ dané predpisom $j(x) = x$ je vloženie. Zobrazenie $j: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dané predpisom $j(x) = (x, x)$ je vloženie (topológia v $\mathbb{R}$ aj v $\mathbb{R}_2$ je daná euklidovskou metrikou).

Cvičenie 4.2. *a) Dokážte že zobrazenie* f *priestoru* X *do priestoru* Y *je vloženie práve vtedy, keď* f *je prosté, spojité a pre každú otvorenú (uzavretú) podmnožinu* U *priestoru* X *je* $f[U]$ *otvorená (uzavretá) podmnožina podpriestoru* $f[X]$ *priestoru* Y.

b) Dokážte, že zložené zobrazenie z dvoch vložení je tiež vloženie.

5 Axiomy oddeliteľnosti

Je známe, že v metrických a teda aj v metrizovateľných priestoroch pre každé dva rôzne body existujú ich okolia, ktoré sú disjunktné. Táto vlastnosť topologických priestorov je jednou (asi najznámejšou) z axióm oddeliteľnosti. Axiomy oddeliteľnosti definujú teda isté vlastnosti topologických priestorov.

Definícia 5.1. *Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$sa nazýva*

1) T_0-priestor ak pre každé $a, b \in X$, $a \neq b$ existuje $U \in \mathcal{T}$ tak, že $a \in U$ a $b \notin U$ alebo existuje $V \in \mathcal{T}$ tak, že $b \in V$ a $a \notin V$.

2) T_1-priestor, ak pre každé $a, b \in X$, $a \neq b$ existujú $U, V \in \mathcal{T}$ tak, že $a \in U$, $b \notin U$ a súčasne $b \in V$, $a \notin V$.

3) T_2-priestor (hausdorfovský priestor) ak pre každé $a, b \in X$, $a \neq b$ existujú $U, V \in \mathcal{T}$ také, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$.

4) regulárny, ak pre každú uzavretú podmnožinu A priestoru $(X, \mathcal{T})$ a každý bod $c \in X \setminus A$ existujú $U, V \in \mathcal{T}$ také, že $c \in U$, $A \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.

5) T_3-priestor, ak $(X, \mathcal{T})$ je regulárny T_1-priestor.

6) úplne regulárny, ak pre každú uzavretú podmnožinu A priestoru $(X, \mathcal{T})$ a každý bod $c \in X \setminus A$ existuje spojité zobrazenie $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0, 1]$ také, že $f[A] \subseteq \{0\}$ a $f(c) = 1$.

7) $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor, ak $(X, \mathcal{T})$ je úplne regulárny T_1-priestor.

8) normálny, ak pre každé dve disjunktné uzavreté podmnožiny A, B priestoru $(X, \mathcal{T})$ existujú disjunktné otvorené podmnožiny U, V také, že $A \subseteq U$ a $B \subseteq V$.

9) T_4-priestor, ak $(X, \mathcal{T})$ je normálny T_1-priestor.

Príklady 5.1. *1) Indiskrétny priestor, ktorý má aspoň dva rôzne body nie je T_0-priestor.*

2) Sierpiského dvojprvkový priestor $S_2 = (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\})$ a priestor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ sú T_0-priestory, ktoré nie sú T_1-priestormi.

3) Priestor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ je T_1-priestor, ktorý nie je T_2-priestorom.

4) Dvojprvkový indiskrétny priestor je regulárny aj úplne regulárny a nie je T_3- ani $T_{3\frac{1}{2}}$-priestorom.

5) Sierpiského priestor S_2 je normálny a nie je ani úplne regulárny ani regulárny.

V nasledujúcej vete je charakterizácia T_1-priestorov, ktorá sa často (pre svoju väčšiu názornosť) používa aj ako definícia.

Veta 5.1. *Priestor $(X, \mathcal{T})$ je T_1-priestor práve vtedy, keď každá jednoprvková podmnožina priestoru X je uzavretá v $(X, \mathcal{T})$.*

Dôkaz. $\Rightarrow$: Nech $a \in X$. Pre každé $b \in X \backslash \{a\}$ existuje $V_b \in \mathcal{T}$ také, $b \in V_b$ a súčasne $a \notin V_b$, t. j. $V_b \subseteq X \backslash \{a\}$. Preto $X \backslash \{a\}$ je otvorená podmnožina $(X, \mathcal{T})$ a $\{a\}$ je uzavretá podmnožina $(X, \mathcal{T})$.

$\Leftarrow$: Nech $a, b \in X$, $a \neq b$. Potom $U = X \backslash \{b\} \in \mathcal{T}$, $a \in X \backslash \{b\}$, $b \notin U$ a $V = X \backslash \{a\} \in \mathcal{T}$, $b \in X \backslash \{a\}$, $a \notin V$. Teda $(X, \mathcal{T})$ je T_1-priestor. □

Veta 5.2. *1) Každý úplne regulárny priestor ($T_{3\frac{1}{2}}$-priestor) je regulárny priestor (T_3-priestor).*

2) Pre $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, každý T_i-priestor je T_{i-1}-priestor.

Dôkaz. 1) Nech X je úplne regulárny, A je uzavretá podmnožina v X a $c \in X \backslash A$. Potom existuje spojité zobrazenie $f : X \longrightarrow [0, 1]$, pre ktoré $f[A] \subseteq \{0\}$ a $f(c) = 1$. Množiny $U = f_{-1}[[0, \frac{1}{2})]$, $V = f_{-1}[(\frac{1}{2}, 1]]$ sú otvorené v X, $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ a $c \in V$. Teda X je regulárny.

2) Zrejmý, stačí si uvedomiť, že jednoprvkové množiny sú uzavreté. □

Veta 5.3. *Každý podpriestor T_i-priestoru, $i \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3\frac{1}{2}\}$, (regulárneho priestoru, úplne regulárneho priestoru) je T_i-priestor (regulárny priestor, úplne regulárny priestor).*

Dôkaz. Nech X je regulárny priestor a Y je podpriestor X. Nech B je uzavretá podmnožina v Y a $c \in Y \backslash B$. Potom existuje uzavretá podmnožina A v X taká, že $B = A \cap Y$. Zrejme $c \in X \backslash A$ a preto existujú otvorené disjunktné podmnožiny U, V priestoru X, pre ktoré $A \subseteq U$, $c \in V$. Množiny $U_1 = U \cap Y$, $V_1 = V \cap Y$ sú otvorené disjunktné podmnožiny podpriestoru Y, pre ktoré $B \subseteq U_1$, $c \in V_1$. Teda Y je regulárny priestor. Ostatné prípady sa dokážu podobne. □

V prípade, že topológia je daná pomocou bázy topológie, môžu byť užitočné nasledujúce charakterizácie regulárnosti, resp. úplnej regulárnosti.

Veta 5.4. *Nech X je topologický priestor a $\mathcal{B}$ je báza topológie priestoru X. Potom platí:*

1) Priestor X je regulárny práve vtedy, keď pre každé $U \in \mathcal{B}$ a každé $c \in U$ existuje $V \in \mathcal{B}$ také, že $c \in V$ a $\overline{V} \subseteq U$.

2) Priestor X je úplne regulárny práve vtedy, keď pre každé $U \in \mathcal{B}$ a každé $c \in U$ existuje spojité zobrazenie $f : X \longrightarrow [0, 1]$ také, že $f[X \backslash U] \subseteq \{0\}$ a $f(c) = 1$.

Dôkaz. 1) Nech X je regulárny, $U \in \mathcal{B}$ a $c \in U$. Potom $X \backslash U$ je uzavretá v X a $c \notin X \backslash U$. Pretože X je regulárny, existujú otvorené množiny W_1 a W_2 v X také, že $c \in W_1$, $X \backslash U \subseteq W_2$ a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Ďalej existuje $V \in \mathcal{B}$, pre ktoré $c \in V \subseteq W_1$. Zrejme $V \cap W_2 = \emptyset$ a preto $V \subseteq X \backslash W_2$. Pretože $X \backslash W_2$ je uzavretá v X, platí $\overline{V} \subseteq X \backslash W_2$. Súčasne platí $X \backslash W_2 \subseteq U$. Teda máme $\overline{V} \subseteq U$.

Obrátene, nech A je uzavretá podmnožina priestoru X a $c \in X \backslash A$. Potom $X \backslash A$ je otvorená v X, $c \in X \backslash A$ a preto existuje $U \in \mathcal{B}$ tak, že $c \in U$. Podľa predpokladu potom existuje aj $V \in \mathcal{B}$, pre ktoré $c \in V$ a $\overline{V} \subseteq U$. Zrejme $A \subseteq X \backslash U \subseteq X \backslash \overline{V}$, $c \in V$, V, $X \backslash \overline{V}$ sú otvorené a $V \cap X \backslash \overline{V} = \emptyset$. Teda X je regulárny.

2) Podobne ako 1) - cvičenie. □

V prípade, že topológia je daná pomocou báz okolí je užitočná nasledujúca charakterizácia regulárnosti, resp. úplnej regulárnosti.

Veta 5.5. *Nech X je topologický priestor a pre každé $a \in X$ je $\mathcal{B}(a)$ je báza okolí bodu a v priestore X. Potom platí:*

1) Priestor X je regulárny práve vtedy, keď pre každé $a \in X$ a každé $V \in \mathcal{B}(a)$ existuje $W \in \mathcal{B}(a)$ také, že $\overline{W} \subseteq V$.

2) Priestor X je úplne regulárny práve vtedy, keď pre každé $a \in X$ a každé $V \in \mathcal{B}(a)$ existuje spojité zobrazenie $f : X \longrightarrow [0,1]$ také, že $f[X \backslash V] \subseteq \{0\}$ a $f(a) = 1$.

Dôkaz. 1)Nech $(X, \mathcal{T})$ je regulárny, $a \in X$ a $V \in \mathcal{B}(a)$. Potom $int(V) \in \mathcal{T}$, $a \in int(V)$ a pretože $\mathcal{T}$ je báza $\mathcal{T}$ podľa predchádzajúcej vety existuje $U \in \mathcal{T}$ tak, že $a \in U$ a $\overline{U} \subseteq int(V)$. Potom U je okolie a a preto existuje $W \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $W \subseteq U$. Zrejme $\overline{W} \subseteq \overline{U} \subseteq V$. Obrátene, nech platí uvedená podmienka. Vyberme $\mathcal{T}$ ako bázu topológie $\mathcal{T}$ a použijeme predchádzajúcu vetu. Nech $U \in \mathcal{T}$ a $a \in U$. Potom U je okolie a a existuje $V \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $V \subseteq U$. Ďalej, existuje $W \in \mathcal{B}(a)$ tak, že $\overline{W} \subseteq V$. Potom $int(W) \in \mathcal{T}$, $a \in int(W)$ a $\overline{int(W)} \subseteq \overline{W} \subseteq V \subseteq U$. Teda $(X, \mathcal{T})$ je regulárny priestor.

2) Podobne ako 1). □

Dôsledok 5.1. *Priestor X je regulárny práve vtedy, keď pre každé $a \in X$ je systém všetkých uzavretých okolí bodu a bázou okolí bodu a.*

Teraz uvedieme príklad priestoru, ktorý je T_2-priesorom a nie je regulárny.

Príklad 5.1. *Priestor $K = (\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathcal{T}_K)$ z príkladu 2.6 je zrejme T_2-priestor. Ukážeme, že nie je regulárny (a teda ani T_3-priestor). Nech pre každé $(a, b) \in K$ je $\mathcal{B}(a, b)$ je systém okolí bodu (a, b) definovaný v príklade 2.6. Zvoľme ľubovoľný bod $(c, 0)$ v K a $K_1(c, 0) \in \mathcal{B}(c, 0)$. Nech $V \in \mathcal{B}(c, 0)$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $V = K_\varepsilon(c, 0)$. Je zrejmé, že $(c + \frac{\varepsilon}{2}, 0) \in \overline{K_\varepsilon(c, 0)}$ a $(c + \frac{\varepsilon}{2}, 0) \notin K_1(c, 0)$. Teda pre každé $V \in \mathcal{B}(c, 0)$ platí $\overline{V} \not\subseteq K_1(c, 0)$ a podľa vety 5.5.1) to znamená, že priestor K nie je regulárny.*

Veta 5.6. *Priestor X je normálny práve vtedy, keď pre každú uzavretú podmnožinu A priestoru X a každú otvorenú podmnožinu U v X takú, že $A \subseteq U$ existuje otvorená podmnožina V, pre ktorú platí $A \subseteq V$ a $\overline{V} \subseteq U$.*

Dôkaz. Nech X je normálny, A je uzavretá, U je otvorená podmnožina X a $A \subseteq U$. Potom množiny A a $X \backslash U$ sú uzavreté disjunktné podmnožiny X a teda existujú otvorené podmnožiny V, W v priestore X také, že $A \subseteq V$, $X \backslash U \subseteq W$ a $V \cap W = \emptyset$. Zrejme $V \subseteq X \backslash W \subseteq U$. Pretože $X \backslash W$ je uzavretá, platí $\overline{V} \subseteq X \backslash W$. Teda $A \subseteq V$ a $\overline{V} \subseteq U$.

Obrátene, nech A, B sú disjunktné uzavreté podmnožiny priestoru X. Potom $X \backslash B$ je otvorená v X a $A \subseteq X \backslash B$. Podľa predpokladu existuje otvorená podmnožina V priestoru X taká, že $A \subseteq V$ a $\overline{V} \subseteq X \backslash B$. Potom $B \subseteq X \backslash \overline{V}$, $A \subseteq V$, pričom V a $X \backslash \overline{V}$ sú otvorené disjunktné podmnožiny X. Teda X je normálny. □

Veta 5.7. *(Urysohnova lema) Ak X je normálny priestor a A, B sú uzavreté disjunktné podmnožiny priestoru X, tak existuje spojité zobrazenie $f : X \longrightarrow [0,1]$ také, že $f[A] \subseteq \{0\}$ a $f[B] \subseteq \{1\}$.*

Dôkaz. Nech $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Najprv vytvoríme systém $(V_r : r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}})$ podmnožín priestoru X, ktorý spĺňa nasledujúce podmienky:

(1) Pre každé r je V_r otvorená podmnožina X.

(2) Ak $r < s$, tak $\overline{V_r} \subseteq V_s$.

(3) $A \subseteq V_0$ a $B \subseteq X \backslash V_1$.

Potom ukážeme, že zobrazenie $f : X \longrightarrow [0,1]$ definované predpisom $f(x) = inf\{r \in I_{\mathbb{Q}} : x \in V_r\}$ pre $x \in V_1$ a $f(x) = 1$ pre $x \notin V_1$ má požadované vlastnosti.

Zoraďme prvky množiny $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ do prostej postupnosti $r_1, r_2, \dots r_n, \dots$ tak, že $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Indukciou budeme definovať postupnosť $(V_{r_n} : n \in \mathbb{N})$ tak, že pre každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ konečná postupnosť $(V_{r_i} : 1 \leq i \leq k)$ spĺňa podmienky (1), (2), (3) a ukážeme, že potom aj systém $\{V_{r_n} : n \in \mathbb{N}\} = \{V_r : r \in I_{\mathbb{Q}}\}$ spĺňa (1), (2) a (3). Položme $V_{r_2} = X \backslash B$. Zrejme V_{r_2} je otvorená, $A \subseteq V_{r_2}$ a podľa predchádzajúcej vety môžeme vybrať otvorenú podmnožinu U tak, že $A \subseteq U$ a $\overline{U} \subseteq V_{r_2}$. Teraz položíme $V_{r_1} = U$. Zrejme postupnosť $V_{r_1} = V_0$, $V_{r_2} = V_1$ spĺňa podmienky (1), (2) a (3). Nech $k \geq 2$ a postupnosť $V_{r_1}, \dots V_{r_k}$ spĺňa (1), (2) a (3). Zrejme $r_1 = 0 < r_{k+1} < r_2 = 1$. Nech r_p je najväčšie z čísel $\{r_i : 1 \leq i \leq k\}$, pre ktoré $r_p < r_{k+1}$ a r_q je najmenšie z čísel $\{r_i : 1 \leq i \leq k\}$, pre ktoré $r_{k+1} < r_q$. Potom $r_p < r_q$ a podľa (2) platí $\overline{V_{r_p}} \subseteq V_{r_q}$. Podľa predchádzajúcej vety môžeme vybrať otvorenú podmnožinu V priestoru X tak, že $\overline{V_{r_p}} \subseteq V$ a $\overline{V} \subseteq V_{r_q}$. Položíme $V_{r_{k+1}} = V$. Je zrejmé, že postupnosť $V_{r_1}, \dots, V_{r_{k+1}}$ spĺňa podmienky (1) a (3). Nech $1 \leq i \leq k+1$, $1 \leq j \leq k+1$ a $r_i < r_j$. Ak $i \leq k$ aj $j \leq k$, tak podľa predpokladu $\overline{V_{r_i}} \subseteq V_{r_j}$. Ak $i = k+1$, tak $j \leq k$, $r_q \leq r_j$ a $\overline{V_{r_{k+1}}} \subseteq V_{r_q} \subseteq V_{r_j}$. Ak $j = k+1$, tak $i \leq k$, $r_i < r_{k+1}$ a preto $r_i \leq r_p$. Potom $\overline{V_{r_i}} \subseteq \overline{V_{r_p}} \subseteq V_{r_{k+1}}$. Teda je splnená aj podmienka (2). Máme definovanú postupnosť $(V_{r_n} : n \in \mathbb{N})$, ktorá zrejme spĺňa (1) a (2). Ak $i, j \in \mathbb{N}$ a $r_i < r_j$ tak existuje $k \in \mathbb{N}$, pre ktoré $i \leq k$ aj $j \leq k$ a pretože systém $\{V_{r_m} : 1 \leq m \leq k\}$ spĺňa (2), platí $\overline{V_{r_i}} \subseteq V_{r_j}$. Máme teda definovaný systém $\{V_r : r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}\}$ spĺňajúci podmienky (1), (2) a (3).

Teraz definujme zobrazenie $f : X \longrightarrow [0,1]$ predpisom $f(x) = inf\{r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} : x \in V_r\}$ pre $x \in V_1$ a $f(x) = 1$ pre $x \in X \backslash V_1$. Je zrejmé, že ak $x \in A$, tak $f(x) = 0$ a ak $x \in B$, tak $f(x) = 1$. Ukážeme, že f je spojité. Systém intervalov $\mathcal{S} = \{(a,1] : a \in (0,1)\} \cup \{[0,b) : b \in (0,1)\}$ je subbáza topológie priestoru $[0,1]$. Stačí ukázať, že vzor každého prvku z $\mathcal{S}$ je otvorená podmnožina v X. Nech $b \in (0,1)$. Potom $x \in f_{-1}[[0,b)] \Leftrightarrow inf\{r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} : f(x) \in V_r\} < b \Leftrightarrow$ existuje $r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} \cap [0,b)$ také, že $x \in V_r \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} \cap [0,b)} V_r$. Pretože všetky množiny V_r sú otvorené, je aj množina $f_{-1}[[0,b)]$ otvorená v X. Nech teraz $a \in (0,1)$. Ukážeme, že $f_{-1}[(a,1]] = \bigcup_{r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} \cap (a,1]} (X \backslash \overline{V_r})$ a teda je to otvorená podmnožina v X. Nech $x \in f_{-1}[(a,1]]$. Potom $f(x) > a$ a existujú $r, s \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ také, že $a < r < s < f(x)$. Potom $x \notin V_s \supseteq \overline{V_r}$, t. j. existuje $r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} \cap (a,1]$ také, že $x \in X \backslash \overline{V_r}$. Obrátene, nech $x \in \bigcup_{r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} \cap (a,1]} (X \backslash \overline{V_r})$. Potom existuje $r \in \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} \cap (a,1]$, pre ktoré $x \in X \backslash \overline{V_r}$ a teda $x \notin V_r$. Potom ale $f(x) \geq r > a$ a teda $x \in f_{-1}[(a,1]]$.

□

Dôsledok 5.2. *Ak X je T_4-priestor, tak X je aj $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.*

Cvičenie 5.1. *Dokážte obrátené tvrdenie k Urysohnovej leme.*

Predtým, ako uvedieme príklad $T_{3\frac{1}{2}}$-priestoru, ktorý nie je normálny, je užitočné si všimnúť nasledujúcu vlastnosť T_2-priestorov.

Veta 5.8. *Nech Y je T_2-priestor, X je ľubovoľný priestor a $f,g: X \longrightarrow Y$ sú spojité zobrazenia. Potom množina $E = \{a \in X : f(a) = g(a)\}$ je uzavretá v X*

Dôkaz. Cvičenie. $\square$

Dôsledok 5.3. *Ak $f,g: X \longrightarrow Y$ sú spojité zobrazenia, Y je T_2-priestor, A je hustá podmnožina priestoru X a $f|_A = g|_A$, tak $f = g$.*

Príklad 5.2. *Nech $M = (\mathbb{R} \times [0,\infty), \mathcal{T}_M)$ je priestor z príkladu 2.7 a pre každé $(a,b) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ je $\mathcal{B}(a,b)$ báza okolí bodu (a,b) definovaná v príklade 2.7 (ak $b > 0$, tak $\mathcal{B}(a,b) = \{O_\varepsilon(a,b) : \varepsilon > 0\}$, kde $O_\varepsilon(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < \varepsilon\}$, ak $b = 0$, tak $\mathcal{B}(a,0) = \{L_\varepsilon(a,0) : \varepsilon > 0\}$, kde $L_\varepsilon(a,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : \sqrt{(a-x)^2 + (y-\varepsilon)^2} < \varepsilon\} \cup \{(a,0)\}$). Použitím vety 5.5.2) ukážeme, že M je úplne regulárny priestor, pričom je zrejmé. že je aj T_1-priestorom. Nech $(a,b) \in M$ a $V \in \mathcal{B}(a,b)$. Ak $b > 0$ tak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $V = O_\varepsilon(a,b)$. Definujme zobrazenie $f: M \longrightarrow [0,1]$ tak, že $f(x,y) = \frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\varepsilon}$ ak $(x,y) \in O_\varepsilon(a,b)$ a $f(x,y) = 1$ pre ostatné $(x,y) \in M$. Je zrejmé, že toto zobrazenie je spojité, $f(a,b) = 0$ a $f[M \backslash O_\varepsilon(a,b)] \subseteq \{1\}$. Pre $b = 0$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $V = L_\varepsilon(a,0)$. Definujme teraz zobrazenie $f: M \longrightarrow [0,1]$ tak, že $f(x,y) = \frac{(x-a)^2+y^2}{2y\varepsilon}$ pre $(x,y) \in L_\varepsilon(a,0) \backslash \{(a,0)\}$, $f(a,0) = 0$ a $f(x,y) = 1$ pre ostatné (x,y). Ľahko sa overí, že pre každé $c \in (0,1)$ platí $f_{-1}[[0,c) = L_{c.\varepsilon}(a,0)$, $f_{-1}[(c,1]] = M \backslash \overline{L_{c.\varepsilon}(a,0)}$ z čoho dostávame, že f je spojité. Platí tiež, že $f(a,0) = 0$ a $f[M \backslash L_\varepsilon(a,0)] \subseteq \{1\}$. Teda M je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor. K tomu, aby sme ukázali, že M nie je normálny využijeme to, že M je separabilný priestor a že podpriestor $D = \mathbb{R} \times \{0\}$ priestoru M je diskrétny priestor a je to aj uzavretý podpriestor priestoru M (pre každé $(d,0) \in D$ je množina $\{(d,0)\} = D \cap L_1(d,0)$ otvorená v D a ak $(a,b) \in M \backslash D$, tak $O_b(a,b) \cap D = \emptyset$). Množina $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ je spočítateľná hustá podmnožina v M a podľa dôsledku 5.3 je každé spojité zobrazenie g $M \longrightarrow [0,1]$ jednoznačne určené zobrazením $g|_S$. Teda mohutnosť množiny všetkých spojitých zobrazení $M \longrightarrow [0,1]$ je najviac $\mathbf{c}^{\aleph_0} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$ je mohutnosť kontinua. Predpokladajme, že M je normálny. Pre každé $A \subseteq D$ sú množiny A aj $D \backslash A$ uzavreté v D a pretože D je uzavretý podpriestor M, sú uzavreté aj v M. Okrem toho sú aj disjunktné a preto podľa Urysohnovej lemy existuje spojité zobrazenie $f_A: M \longrightarrow [0,1]$ také, že $f_A[A] \subseteq \{0\}$ a $f_A[D \backslash A] \subseteq \{1\}$. Je zrejmé, že ak $A_1, A_2 \subseteq D$ a $A_1 \neq A_2$, tak $f_{A_1} \neq f_{A_2}$. To ale znamená, že existuje aspoň $2^{\mathbf{c}}$ spojitých zobrazení $M \longrightarrow [0,1]$. Dostali sme spor a teda M nie je normálny.*

Teraz ešte uvedieme príklad T_3-priestoru, ktorý nie je úplne regulárny.

Príklad 5.3. *Nech $X = (\mathbb{R} \times [0,\infty)) \cup \{(0,-1)\}$. Na množine X budeme definovať topológiu $\mathcal{T}$ pomocou báz okolí. Pre každé $(a,b) \in X$ určíme bázu okolí*

$\mathcal{B}(a,b)$ takto: Ak $b > 0$, tak $\mathcal{B}(a,b) = \{\{(a,b)\}\}$. $\mathcal{B}(0,-1) = \{U_i(0,-1) : i \in \mathbb{N}\}$, kde $U_i(0,-1) = ([i,\infty) \times [0,\infty)) \cup \{(0,-1)\}$ pre každé $i \in \mathbb{N}$. Nakoniec, nech $(a,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Definujme $A_1(a,0) = \{a\} \times [0,2]$, $A_2(a,0) = \{(a+y,y) : 0 \le y \le 2\}$ a $A(a,0) = A_1(a,0) \cup A_2(a,0)$. Potom $\mathcal{B}(a,0) = \{A(a,0)\backslash F : F$ je konečná podmnožina množiny $A(a,0)\backslash\{(a,0)\}\}$. Ľahko sa overí, že podmienky (bo1), (bo2) a (bo3') z vety 2.15 sú splnené a uvedené systémy určujú topológiu $\mathcal{T}$ na X tak, že pre každé $(a,b) \in X$ je $\mathcal{B}(a,b)$ báza okolí bodu (a,b) v $(X,\mathcal{T})$, pričom $\mathcal{B}(a,b) \subseteq \mathcal{T}$. Je zrejmé, že $(X,\mathcal{T})$ je T_2-priestor a teda aj T_1-priestor. Pre každé $i \in \mathbb{N}$ platí, že $\overline{U_i(0,-1)} = U_i(0,-1) \cup ((i-2,i) \times \{0\})$ a preto $\overline{U_{i+2}(0,-1)} \subseteq U_i(0,-1)$ a pre každé $V \in \mathcal{B}(a,b)$, kde $(a,b) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$, platí $\overline{V} = V$. Podľa vety 5.5.1) z toho vyplýva, že $(X,\mathcal{T})$ je regulárny a pretože je to aj T_1-priestor, je to T_3-priestor.

Teraz ukážeme, že nie je úplne regulárny. Označme $L = \mathbb{R} \times \{0\}$ a $L_i = [i-1,i] \times \{0\}$ pre každé $i \in \mathbb{N}$. Zrejme L_1 je uzavretá podmnožina priestoru $(X,\mathcal{T})$ a $(0,-1) \notin L_1$. Predpokladajme, že $(X,\mathcal{T})$ je úplne regulárny. Potom existuje spojité zobrazenie $f : (X,\mathcal{T}) \longrightarrow [0,1]$ také, že $f[L_1] = \{0\}$ a $f(0,-1) = 1$. Nech $(c,0) \in L$. Ak $f(c,0) > 0$, tak $(0,1]$ je okolie $f(c,0)$ v $[0,1]$ a preto existuje $V \in \mathcal{B}(c,0)$ také že $f[V] \subseteq (0,1]$. Potom množina $Z(c,0) = \{(x,y) \in A(c,0) : f(x,y) = 0\}$ je konečná ($Z(c,0) \subseteq A(c,0)\backslash V$). Nech teraz $(d,0) \in L$ a $f(d,0) = 0$. Potom pre každé $k \in \mathbb{N}$ je $[0,\frac{1}{k})$ okolie $f(d,0)$ a existuje $V_k \in \mathcal{B}(d,0)$ tak, že $f[V_k] \subseteq [0,\frac{1}{k})$. Potom $F_k = \{(x,y) \in A(d,0) : f(x,y) \ge \frac{1}{k}\}$ je konečná a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ je spočítateľná. Ak $(x,y) \in A(d,0)$ a $f(x,y) > 0$, tak existuje $k \in \mathbb{N}$ pre ktoré $f(x,y) \ge \frac{1}{k}$ a teda $(x,y) \in F_k$. Preto množina $P(d,0) = \{(x,y) \in A(d,0) : f(x,y) > 0\}$ je spočítateľná. Pretože $(0,1]$ je okolie $f(0,-1)$ v priestore $[0,1]$, existuje $U_i(0,-1) \in \mathcal{B}(0,-1)$ tak, že $f[U_i(0,-1)] \subseteq (0,1]$. Pretože $L_{i+1} \subseteq U_i(0,-1)$, dostávame, že pre všetky $(x,0) \in L_{i+1}$ platí $f(x,0) > 0$. Teraz ukážeme, že zo spojitosti f a z toho, že $f[L_1] = \{0\}$ vyplýva, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $K_n = \{(x,0) \in L_n : f(x,0) = 0\}$ nekonečná a tým dostaneme spor (s predpokladom, že $(X,\mathcal{T})$ je úplne regulárny). Zrejme $K_1 = L_1$ je nekonečná množina. Nech $n \in \mathbb{N}$ a predpokladajme, že K_n je nekonečná. Potom existuje nekonečná spočítateľná $K'_n \subseteq K_n$. Pre každé $(z,0) \in K'_n$ je $(z,0) \in L$, $f(z,0) = 0$ a preto je množina $A_0(z,0) = \{(x,y) \in A_2(z,0) : f(x,y) > 0\} \subseteq P(z,0)$ (pozri $P(d,0)$ vyššie) spočítateľná. Nech $A_0 = \bigcup_{(z,0)\in K'_n} A_0(z,0)$ Potom A_0 je spočítateľná a aj jej projekcia $A = \{(x,0) : (x,y) \in A_0\}$ na L je spočítateľná množina. Nech teraz $(t,0) \in L_{n+1}\backslash A$. Pre každé $(z,0) \in K'_n$ (jediný) bod $(x_z,y_z) \in A_2(z,0) \cap A_1(t,0)$ nepatrí do A_0 (lebo $(x_z,0) = (t,0)$ nepatrí do A). Potom $(x_z,y_z) \notin A_0(z,0)$ a preto $f(x_z,y_x) = 0$. Ak $(z,0),(z',0) \in K'_n$ a $(z,0) \neq (z',0)$, tak $(x_z,y_z) \neq (x_{z'},y_{z'})$. Preto množina $\{(x,y) \in A_1(t,0) : f(x,y) = 0\} \subseteq Z(t,0)$ (pozri $Z(c,0)$ vyššie) je nekonečná a preto $f(t,0) = 0$ (vyššie sme ukázali, že ak $f(c,0) > 0$, tak $Z(c,0)$ je konečná). Pretože $L_{n+1}\backslash A$ je nekonečná a $L_{n+1}\backslash A \subseteq K_{n+1}$, platí, že K_{n+1} je nekonečná. Teda pre každé $n \in \mathbb{N}$ je K_n nekonečná množina.

Teraz uvedieme jeden príklad postačujúcej podmienky pre normálnosť topologického priestoru.

Veta 5.9. *Ak X je regulárny priestor so spočítateľnou bázou, tak X je nor-*

málny.

Dôkaz. Nech $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza priestoru X, A, B sú uzavreté podmnožiny priestoru X a $A \cap B = \emptyset$. Pre každé $x \in X$ nech $\mathcal{B}(x) = \{V \in \mathcal{B} : x \in V\}$. Pre každé $a \in A$ platí $a \in X \backslash B$, $X \backslash B$ je otvorená v X, preto existuje $U_a \in \mathcal{B}(a)$ také, že $U_a \subseteq X \backslash B$. Pretože X je regulárny, podľa vety 5.4.1) existuje $V_a \in \mathcal{B}(a)$ také,že $\overline{V_a} \subseteq U_a$. Potom $\overline{V_a} \subseteq X \backslash B$ a preto $\overline{V_a} \cap B = \emptyset$. Všetky prvky systému $\{V_a : a \in A\}$ patria do $\mathcal{B}$, preto $\{V_a : a \in A\} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, platí $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\overline{V_n} \cap B = \emptyset$. Podobne sa ukáže, že existuje systém $\{W_k : k \in \mathbb{N}\}$ prvkov bázy $\mathcal{B}$ taký, že $B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$ a $\overline{W_k} \cap A = \emptyset$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Pre každé $n, k \in \mathbb{N}$ Nech $V_n^* = V_n \backslash (\bigcup_{k \leq n} \overline{W_k})$ a $W_k^* = W_k \backslash (\bigcup_{n \leq k} \overline{V_n})$. Pretože pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\overline{W_k} \cap A = \emptyset$ a $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$, dostávame, že $A \subseteq V^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*$. Podobne dostaneme, že $B \subseteq W^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k^*$. Pre $k \leq n$ je $V_n^* \cap W_k = \emptyset$, $W_k^* \subseteq W_k$ a preto $V_n^* \cap W_k^* = \emptyset$. Ak $n \leq k$, tak $V_n \cap W_k^* = \emptyset$, $V_n^* \subseteq V_n$ a preto $V_n^* \cap W_k^* = \emptyset$. Množiny V^*, W^* sú otvorené v X, $A \subseteq V^*$, $B \subseteq W^*$ a pretože pre každé $n, k \in \mathbb{N}$ je $V_n^* \cap W_k^* = \emptyset$ platí $V^* \cap W^* = \emptyset$. Teda X je normálny. □

Príklad 5.4. *Sorgenfreyova priamka $S = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ je normálny priestor. Nech A_1, A_2 sú uzavreté podmnožiny v S, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Nech $G_1 = \mathbb{R} \backslash A_1$, $G_2 = \mathbb{R} \backslash A_2$ a pre $i \in \{1, 2\}$ nech $F_i = \{a \in G_i :$ neexistuje otvorený interval (c, d) taký, že $a \in (c, d) \subseteq G_i\}$. Množiny G_i sú otvorené v S a množiny F_i sú spočítateľné. Ak totiž $b, d \in F_i$, $b < d$, tak existujú $\varepsilon_b > 0$, $\varepsilon_d > 0$, pre ktoré $[b, b + \varepsilon_b) \subseteq G_i$ a $[d, d + \varepsilon_d) \subseteq G_i$. Zrejme $[b, b + \varepsilon_b) \cap [d, d + \varepsilon_d) = \emptyset$ (v opačnom prípade máme $d \in (b, b + \varepsilon_b) \subseteq G_i$ - spor). Potom množina $F = F_1 \cup F_2$ je tiež spočítateľná a preto aj systém množín $\mathcal{B} = \{(r, s) : r, s \in Q,\ r < s\} \cup \{[b, t) : b \in F,\ t \in Q,\ b < t\}$ je spočítateľný a je to báza nejakej topológie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ na množine $\mathbb{R}$. Je zrejmé, že $\mathcal{T}_{nat} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_S$ a tiež, že G_1 aj G_2 sú otvorené v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$. Potom A_1 aj A_2 sú uzavreté v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$. Použitím Vety 5.4.1) a vzťahu $\mathcal{T}_{nat} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_S$ sa ľahko overí, že priestor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_B)$ je regulárny a pretože má spočítaleľnú bázu, je aj normálny. Potom existujú množiny $U_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ a $U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ také, že $A_1 \subseteq U_1$, $A_2 \subseteq U_2$ a $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Ale $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_S$ a preto U_1, U_2 sú otvorené aj v S. Teda S je normálny priestor.*

Cvičenie 5.2. *Nech X je topologický priestor a $(g_n : X \longrightarrow \mathbb{R} : n \in \mathbb{N})$ je postupnosť spojitých zobrazení, ktorá rovnomerne konverguje k zobrazeniu $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dokážte, že potom g je spojité zobrazenie.*

Veta 5.10. *(Tietzeho veta) Nech M je uzavretý podpriestor normálneho priestoru X. Potom každé spojité zobrazenie $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ $(f : M \longrightarrow [0, 1])$ možno spojito rozšíriť na X (t. j. existuje spojité zobrazenie $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $(F : X \longrightarrow [0, 1])$ také, že pre každé $x \in M$ platí $f(x) = F(x)$).*

Dôkaz. Začneme s prípadom $f : M \longrightarrow [0, 1]$, pričom, z praktických dôvodov, nahradíme priestor $[0, 1]$ priestorom $[-1, 1] = \mathbb{J}$.

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie.

Nech $f_0 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie, $c \in \mathbb{R}^+$ a pre každé $x \in M$ platí $|f_0(x)| \leq c$. Potom existuje spojité zobrazenie $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, pre ktoré platí:

(1) Pre každé $x \in X$ $|g(x)| \leq \frac{1}{3}c$.

(2) Pre každé $x \in M$ $|f_0(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}c$.

Dôkaz tvrdenia: Nech $A = (f_0)_{-1}[[-c, -\frac{1}{3}c]]$, $B = (f_0)_{-1}[[\frac{1}{3}c, c]]$. Množiny A, B sú uzavreté v M a teda aj v X, $A \cap B = \emptyset$ a podľa Urysohnovej lemy existuje spojité zobrazenie $h : X \longrightarrow [0,1]$ také, že $h[A] \subseteq \{0\}$, $h[B] \subseteq \{1\}$. Definujme zobrazenie $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ predpisom $g(x) = \frac{2}{3}c.h(x) - \frac{1}{3}c$. Zrejme g je spojité zobrazenie a ľahko sa overí, že spĺňa podmienky (1) a (2).

Nech teraz $f : M \longrightarrow [-1,1] = \mathbb{J}$ je spojité zobrazenie a $j_{\mathbb{J}} : \mathbb{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ je vloženie dané predpisom $j_{\mathbb{J}}(x) = x$. Budeme definovať postupnosť $(g_i : X \longrightarrow \mathbb{R} : i \in \mathbb{N})$ spojitých zobrazení takých, že pre každé $i \in \mathbb{N}$ platí:

(3_i) Pre každé $x \in X$ $|g_i(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1}$.

(4_i) Pre každé $x \in M$ $|f(x) - \sum_{k=1}^{i} g_k(x)| \leq (\frac{2}{3})^i$

Zobrazenie g_1 definujeme použitím pomocného tvrdenia tak, že za f_0 zoberieme zobrazenie $j_{\mathbb{J}} \circ f$ a za c zoberieme 1. Potom existuje spojité zobrazenie $g_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pre ktoré platí:

(3_1) Pre každé $x \in X$ $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}$

(4_1) Pre každé $x \in M$ $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$.

Predpokladajme, že zobrazenia $g_1, \ldots, g_i$ spĺňajúce dané podmienky sú už definované. Opätovným použitím pomocného tvrdenia pre $f_0 = j_{\mathbb{J}} \circ f - (\sum_{k=1}^{i} g_k)|_M$ a $c = (\frac{2}{3})^i$ dostaneme spojité zobrazenie $g_{i+1} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ také, že:

(3_{i+1}) Pre každé $x \in X$ $|g_{i+1}(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^i$.

(4_{i+1}) Pre každé $x \in M$ $|j_{\mathbb{J}} \circ f - (\sum_{k=1}^{i} g_k)|_M - g_{i+1}(x)| = |f(x) - \sum_{k=1}^{i+1} g_k(x)| \leq \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^i = (\frac{2}{3})^{i+1}$.

Teraz definujme zobrazenie F na X predpisom $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$. Pretože pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$-1 \leq -\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1} \leq \sum_{i=1}^{k} g_i(x) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1} \leq 1$

dostávame, že F je zobrazenie $X \longrightarrow \mathbb{J}$. Z platnosti ($3_i$) dostávame, že F je dobre definované a spojité a z platnosti (4_i) máme, že pre každé $x \in M$ platí $F(x) = f(x)$.

Nech teraz $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie a $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{J}$ je vloženie na podpriestor $(-1,1)$ priestoru $\mathbb{J}$ (dané napríklad predpisom $u(x) = \frac{x}{1+|x|}$). Potom $u \circ f : M \longrightarrow \mathbb{J}$ je spojité zobrazenie a podľa predchádzajúcej časti dôkazu existuje spojité zobrazenie $F_1 : X \longrightarrow \mathbb{J}$ také, že pre každé $x \in M$ platí $F_1(x) = u \circ f(x)$. Množina $L = (F_1)_{-1}[\{-1,1\}]$ je uzavretá v X, pre každé $x \in M$ je $F_1(x) = u \circ f(x) \in (-1,1)$ a teda $M \cap L = \emptyset$. Podľa Urysohnovej lemy existuje spojité zobrazenie $h : X \longrightarrow [0,1]$ také, že $h[M] \subseteq \{1\}$ a $h[L] \subseteq \{0\}$. Ak teraz toto zobrazenie h budeme považovať za zobrazenie $X \longrightarrow \mathbb{J}$ tak to bude spojité zobrazenie a zobrazenie $F_2 : X \longrightarrow \mathbb{J}$ dané predpisom $F_2(x) = F_1(x).h(x)$ bude tiež spojité, pričom pre každé $x \in M$ $F_2(x) = F_1(x)$, pre každé $x \in L$ $F_2(x) = 0$ a $F_2[X] \subseteq (-1,1)$. Ak označíme u^{-1} inverzné zobrazenie k homeomorfizmu $u : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ (tu sme rovnako označili zobrazenie so zmeneným oborom hodnôt) tak zobrazenie predpis $F(x) = u^{-1} \circ F_2(x)$ definuje spojité zobrazenie $X \longrightarrow \mathbb{R}$, pričom pre každé $x \in M$ platí $F(x) = u^{-1}(F_2(x)) = u^{-1}(F_1(x)) = u^{-1}(u(f(x)) = f(x)$.

□

Cvičenie 5.3. *Dokážte, že z podmienky v Tietzeho vete vylýva podmienka v Urysohnovej leme a teda podmienka z Tietzeho vety, podmienka z Urysohnovej lemy a definícia normálneho priestoru sú ekvivalentné.*

6 Súčin topologických priestorov

Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, $p_X : X \times Y \longrightarrow X$, $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ sú prirodzené projekcie. Chceme definovať na množine $X \times Y$ topológiu $\mathcal{T}$ tak, aby p_X, p_Y boli spojité zobrazenia. Zrejme $\mathcal{S} = \{(p_X)_{-1}[U] : U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{(p_Y)_{-1}[V] : V \in \mathcal{T}_Y\} \subseteq \mathcal{T}$. Nech $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ je topológia na $X \times Y$ určená subbázou $\mathcal{S}$. Prvky $\mathcal{S}$ vyzerajú takto: $(p_X)_{-1}[U] = U \times Y$, $(p_Y)_{-1}[V] = X \times V$. Systém $\mathcal{B}_\mathcal{S} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$ je báza topológie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ a pre každú topológiu $\mathcal{T}$ na $X \times Y$, pre ktorú sú prirodzené projekcie p_X, p_Y spojité platí $\mathcal{T}_\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Teda $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ je najmenšia ("najhrubšia") topológia na množine $X \times Y$, pre ktorú sú projekcie p_X, p_Y spojité. Ľahko sa overí, že pre ľubovoľný priestor $(Z, \mathcal{T}_Z)$ je zobrazenie $f : (Z, \mathcal{T}_Z) \longrightarrow (X \times Y, \mathcal{T}_\mathcal{S})$ spojité práve vtedy, keď zobrazenia $p_X \circ f$ a $p_Y \circ f$ sú spojité. Priestor $(X \times Y, \mathcal{T}_\mathcal{S})$ sa nazýva (topologický) súčin priestorov $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ a označuje sa $(X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$. Nech teraz $\mathcal{B}_X$ je báza topológie $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{B}_Y$ je báza topológie $\mathcal{T}_Y$, $\mathcal{S}_1 = \{U \times Y : U \in \mathcal{B}_X\} \cup \{X \times V : V \in \mathcal{B}_Y\}$ a $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}$ je topológia na $X \times Y$ určená subbázou $\mathcal{S}_1$. Je zrejmé, že $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{S}$ a že projekcie p_X, p_Y sú spojité zobrazenia priestoru $(X \times Y, \mathcal{T}_{\mathcal{S}_1})$ do $(X, \mathcal{T}_X)$, resp. $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Potom ale z vyššie uvedeného vylýva, že $\mathcal{T}_\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}$ a preto $\mathcal{T}_\mathcal{S} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}$. Teda $\mathcal{S}_1$ je subbáza a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_1} = \{U \times V : U \in \mathcal{B}_X,\ V \in \mathcal{B}_Y\}$ je báza topológie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ priestoru $(X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$.

Analogicky sa definuje (topologický) súčin ľubovoľného systému topologických priestorov.

Definícia 6.1. *Nech $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A)$ je ľubovoľný systém topologických priestorov (A je množina) a pre každé $\beta \in A$ je $p_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ prirodzená projekcia karteziánskeho súčinu množín $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ na množinu X_β. Potom (topologický) súčin systému $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A)$, ktorý označíme $\prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, definujeme takto:*

a) Ak $A = \emptyset$, tak $\prod_{\alpha \in \emptyset}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) = (\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})$, t. j. súčin prázdneho systému topologických priestorov je jednoprvkový priestor.

b) Ak $A \neq \emptyset$, tak $\prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) = (\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathcal{T}_\mathcal{S})$, kde $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ je topológia na množine $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ určená subbázou $\mathcal{S} = \{(p_\alpha)_{-1}[U] : \alpha \in A,\ U \in \mathcal{T}_\alpha\}$. Topológia $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ sa nazýva súčinová topológia (topológia súčinu) a subbáza $\mathcal{S}$ sa nazýva štandardná subbáza súčinovej topológie.

c) Ak pre všetky $\alpha \in A$ platí $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) = (Y, \mathcal{T}_Y)$ tak v takomto prípade súčin $\prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ zapisujeme $(Y, \mathcal{T}_Y)^A$ a nazývame ho aj (topologická) mocnina priestoru $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Príklady 6.1. *1) Nech D_2 je dvojprvkový diskrétny priestor na množine $\{0, 1\}$. Súčin $D_2 \times D_2$ je diskrétny priestor, $D_2^\mathbb{N}$ nie je diskrétny priestor. Každý neprázdny prvok bázy súčinovej topológie, ktorá je určená štandardnou subbázou v tomto priestore má mohutnosť $2^{\aleph_0}$.*

2) Súčin ľubovoľného systému indiskrétnych priestorov je indiskrétny priestor, súčin každého konečného systému diskrétnych priestorov je diskrétny priestor.

3) Ak $(X, \mathcal{T}) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \mathcal{T}_n)$ tak bázu súčinovej topológie tvoria všetky množiny tvaru $U_1 \times ... \times U_k \times X_{k+1} \times X_{k+2} \times ...$, kde $k \in N$ a pre všetky $i \leq k$ je $U_i \in \mathcal{T}_i$.

4) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})^{\mathbb{N}}$ podmnožina $(0,1)^{\mathbb{N}}$ nie je otvorená, lebo neobsahuje žiadny neprázdny prvok bázy súčinovej topológie uvedenej v 3).

Veta 6.1. *Nech $(X, \mathcal{T}) = \prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ je (topologický) súčin neprázdneho systému priestorov $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A)$ a $\mathcal{S}$ je štandardná subbáza súčinovej topológie $\mathcal{T}$. Potom platí:*

1) Pre každé $\alpha \in A$ je prirodzená projekcia $p_\alpha : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ spojité zobrazenie.

2) Ak $\mathcal{T}_1$ je topológia na X, vzhľadom na ktorú sú všetky prirodzené projekcie $p_\alpha : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ spojité, tak $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$.

3) Systém $\mathcal{B} = \{V \in \mathcal{P}(X)$: existuje neprázdna konečná podmnožina K množiny A a pre každé $\alpha \in K$ existuje $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ tak, že $V = \bigcap_{\alpha \in K} (p_\alpha)_{-1}[U_\alpha]\}$ je báza súčinovej topológie $\mathcal{B}$, ktorá sa nazýva štandardnou bázou topológie súčinu.

4) Ak pre každé $\alpha \in A$ je $\mathcal{B}_\alpha$ báza topológie $\mathcal{T}_\alpha$, tak systém $\mathcal{S}_1 = \{(p_\alpha)_{-1}[U] : \alpha \in A,\ U \in \mathcal{B}_\alpha\}$ je subbáza topológie $\mathcal{T}$ a systém $\mathcal{B}_1 = \{V \in \mathcal{P}(X)$: existuje neprázdna konečná podmnožina K množiny A a pre každé $\alpha \in K$ existuje $U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ tak, že $V = \bigcap_{\alpha \in K} (p_\alpha)_{-1}[U_\alpha]\}$ je báza topológie $\mathcal{T}$.

5) Ak $f : (Z, \mathcal{T}_Z) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ je zobrazenie, tak f je spojité práve vtedy, keď pre každé $\alpha \in A$ je zobrazenie $p_\alpha \circ f$ spojité.

6) Pre každé $\alpha \in A$ je prirodzená projekcia p_α otvorené zobrazenie.

Dôkaz. 1) Zrejmé.

2) Ak všetky prirodzené projekcie $p_\alpha : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ sú spojité, tak $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_1$ a teda platí $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$.

3) Je zrejmé, že ak $V \in \mathcal{B}$, $W \in \mathcal{B}$, tak $V \cap W \in \mathcal{B}$, $X \in \mathcal{B}$ a preto $\mathcal{B}$ je báza nejakej topológie $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ na X. Ďalej je zrejmé, že $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ a teda $\mathcal{T}_\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Na druhej strane, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{B}$ a preto $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{B}$. Teda máme $\mathcal{T}_\mathcal{B} = \mathcal{T}$ a preto $\mathcal{B}$ je báza $\mathcal{T}$.

4) Nech $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}$ je topológia na X určená subbázou $\mathcal{S}_1$ (zrejme $\bigcup_{V \in \mathcal{S}_1} V = X$). Potom, zrejme, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} \subseteq \mathcal{T}$ a všetky prirodzené projekcie $p_\alpha : (X, \mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}) \longrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ spojité. Preto, podľa 2), $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} = \mathcal{T}$ a $\mathcal{S}_1$ je subbáza $\mathcal{T}$. Ľahko sa overí, že $\mathcal{B}_1 = \{U \in \mathcal{P}(X) : \exists_{k \in \mathbb{N}} \exists_{S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{S}_1} U = \bigcap_{i=1}^k S_i\}$ a teda $\mathcal{B}_1$ je báza $\mathcal{T}$.

5) Ak f je spojité, tak, pretože všetky projekcie p_α sú spojité, dostávame, že pre všetky $\alpha \in A$ sú zobrazenia $p_\alpha \circ f$ spojité. Obrátene, nech pre všetky $\alpha \in A$ sú zobrazenia $p_\alpha \circ f$ spojité a $V \in \mathcal{S}$. Potom existuje $\alpha \in A$ a $U \in \mathcal{T}_\alpha$ tak, že $V = (p_\alpha)_{-1}[U]$ a $f_{-1}[V] = f_{-1}[(p_\alpha)_{-1}[U]] = (p_\alpha \circ f)_{-1}[U]$ je otvorená podmnožina v $(Z, \mathcal{T}_Z)$. Teda f je spojité zobrazenie.

6) Podľa vety 4.7 stačí ukázať, že obraz každého prvku štandardnej bázy je otvorená množina. Nech $V = \bigcap_{\alpha \in K} (p_\alpha)_{-1}[U_\alpha]\}$ je prvok štandardnej bázy. Ak $\beta \in A$, tak pre $\beta \notin K$ $p_\beta[V] = X_\beta$ a pre $\beta \in K$ $p_\beta[V] = U_\beta$. Teda pre všetky $\beta \in A$ je $p_\beta[V]$ otvorená množina.

□

Príklady 6.2. *1) V priestore* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ *je systém* $\mathcal{B} = \{(a,b) \times (c,d) : \ a,b,c,d \in \mathbb{R}, \ a < b, \ c < d\}$ *bázou súčinovej topológie. Ľahko sa nahliadne, že* $\mathcal{B}$ *je aj bázou prirodzenej topológie* $\mathcal{T}_{nat}$ *na* $\mathbb{R}^2$*, ktorá je určená euklidovskou metrikou na* $\mathbb{R}^2$ *a teda* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat} \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat})$*. Podobne sa ukáže, že pre každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})^n = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{nat})$*.*

2) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat})$ *je podmnožina* $B = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$ *uzavretá, pričom množina* $p_1[B] = (0, \infty)$ *(*p_1 *je projekcia daná predpisom* $p_1(x,y) = x$*) nie je uzavretá. Teda* $p_1 : \ (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat} \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ *nie je uzavreté zobrazenie.*

Veta 6.2. *Nech* $(X, \mathcal{T}) = \prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ *je súčin systému topologických priestorov, pre každé* $\alpha \in A$ *je* C_α *podmnožina* X_α *a* $C = \prod_{\alpha \in A} C_\alpha$*. Potom platí:*

a) Ak pre každé $\alpha \in A$ *je* C_α *uzavretá podmnožina v* $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$*, tak* C *je uzavretá podmnožina v* $(X, \mathcal{T})$*.*

b) $\overline{C} = \prod_{\alpha \in A} \overline{C_\alpha}$ *, t. j. uzáver množiny* C *v priestore* $(X, \mathcal{T})$ *je rovný súčinu uzáverov množín* C_α *v priestoroch* $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$*.*

Dôkaz. Ak $A = \emptyset$, tak je to zrejmé. Nech $A \neq \emptyset$.

a) Je zrejmé, že $C = \bigcap_{\alpha \in A} (p_\alpha)_{-1}[C_\alpha]$ a pretože všetky množiny $(p_\alpha)_{-1}[C_\alpha]$ sú uzavreté v $(X, \mathcal{T})$ je aj C uzavretá v $(X, \mathcal{T})$.

b)Ak existuje $\alpha \in A$, pre ktoré $C_\alpha = \emptyset$, tak je to zrejmé. Nech pre všetky $\alpha \in A$ platí $C_\alpha \neq \emptyset$. Zrejme $C \subseteq \prod_{\alpha \in A} \overline{C_\alpha}$ a podľa a) je množina $\prod_{\alpha \in A} \overline{C_\alpha}$ uzavretá v $(X, \mathcal{T})$. Preto platí $\overline{C} \subseteq \prod_{\alpha \in A} \overline{C_\alpha}$. Nech teraz $c \in \prod_{\alpha \in A} \overline{C_\alpha}$ a $V = \bigcap_{\alpha \in K} (p_\alpha)_{-1}[U_\alpha]\}$ je prvok štandardnej bázy súčinovej topológie v $(X, \mathcal{T})$ obsahujúci prvok c. Potom pre každé $\alpha \in K$ je U_α okolie bodu $p_\alpha(c)$, $p_\alpha(c) \in \overline{C_\alpha}$ a preto $U_\alpha \cap C_\alpha \neq \emptyset$. Pre každé $\alpha \in K$ vyberme $d_\alpha \in U_\alpha \cap C_\alpha$,a pre každé $\alpha \in A \setminus K$ vyberme $d_\alpha \in C_\alpha$. Zrejme $d \in V \cap C$ a preto $V \cap C \neq \emptyset$. Teda $c \in \overline{C}$ a $\prod_{\alpha \in A} \overline{C_\alpha} \subseteq \overline{C}$.

□

Cvičenie 6.1. *Dokážte, že zobrazenia* $h : \ [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *dané predpisom* $h(x_1, ..., x_k) = min\{x_1, \ ..., \ x_k\}$ *a* $g : \ [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *dané predpisom* $g(x_1, ..., x_k) = max\{x_1, \ ..., \ x_k\}$ *sú spojité.*

Veta 6.3. *Nech* X *je topologický priestor a* $\mathcal{S}$ *je subbáza topológie priestoru* X*. Potom* X *je úplne regulárny práve vtedy, keď pre každé* $V \in \mathcal{S}$ *a každé* $c \in V$ *existuje spojité zobrazenie* $f : \ X \longrightarrow [0,1]$ *také, že* $f(c) = 1$ *a* $f[X \setminus V] \subseteq \{0\}$*.*

Dôkaz. Pretože $X \setminus V$ je uzavretá množina v X a $c \notin X \setminus V$, existencia spojitého zobrazenia $f : \ X \longrightarrow [0,1]$, pre ktoré $f(c) = 1$ a $f[X \setminus V] \subseteq \{0\}$ vyplýva z definície úplne regulárneho priestoru. Obrátene, nech pre každé $V \in \mathcal{S}$ a každé $c \in V$ existuje spojité zobrazenie $f : \ X \longrightarrow [0,1]$ také, že $f(c) = 1$ a $f[X \setminus V] \subseteq \{0\}$. Nech teraz B je uzavretá podmnožina X a $d \notin B$. Potom $U = X \setminus B$ je otvorená podmnožina X a existujú $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{S}$ $(k \in \mathbb{N})$ také, že $d \in \bigcap_{i=1}^k V_i \subseteq U$. Pre každé i existuje spojité zobrazenie $f_i : \ X \longrightarrow [0,1]$, pre ktoré $f_i(c) = 1$ a $f_i[X \setminus V_i] \subseteq \{0\}$. Zobrazenie $g : \ X \longrightarrow [0,1]^k$ definované predpisom $g(x) = (f_1(x), ..., f_k(x))$ je spojité (lebo pre každé i je zobrazenie $p_i \circ g = f_i$ spojité).

Zobrazenie $h: [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ dané predpisom $h(x_1, ..., x_k) = min\{x_1, ..., x_k\}$ je tiež spojité a preto aj zobrazenie $f = h \circ g: X \longrightarrow [0,1]$ je spojité, pričom $f(d) = 1$. Ak $x \in B$, tak (pretože $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus V_i)$ existuje i také, že $x \in X \setminus V_i$ a preto $f_i(x) = 0$. Potom, zrejme, $f(x) = 0$ a preto $f[B] \subseteq \{0\}$. Teda X je úplne regulárny priestor. $\square$

Veta 6.4. *Nech pre každé $\alpha \in A$ je $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ T_i-priestor, kde $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, (regulárny priestor, úplne regulárny priestor). Potom aj súčin $(X, \mathcal{T}) = \prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ je T_i-priestor, (regulárny priestor, úplne regulárny priestor).*

Dôkaz. Ak $A = \emptyset$, tak je to zrejmé. Nech $A \neq \emptyset$. Dokážeme pre prípady regulárnych a úplne regulárnych priestorov. Ostatné prípady sa dokážu podobne.

Nech teda pre každé $\alpha \in A$ je $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ regulárny priestor. Využijeme vetu 5.4.1) a štandardnú bázu $\mathcal{B}$ súčinovej topológie $\mathcal{T}$. Nech $U \in \mathcal{B}$ a $c \in U$. Potom $U = \bigcap_{\alpha \in K}(p_\alpha)_{-1}[U_\alpha]\}$, kde K je neprázdna konečná podmnožina množiny A a pre každé $\alpha \in K$ je $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$. Pre každé $\alpha \in K$ platí $p_\alpha(c) \in U_\alpha$ a preto existuje $V_\alpha \in T_\alpha$ tak, že $p_\alpha(c) \in V_\alpha$ a $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$ ($(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ je regulárny a $\mathcal{T}_\alpha$ je báza $\mathcal{T}_\alpha$). Potom $c \in V = \bigcap_{\alpha \in K}(p_\alpha)_{-1}[V_\alpha]\}$, $V \in \mathcal{B}$ a $\overline{V} \subseteq \bigcap_{\alpha \in K}(p_\alpha)_{-1}[\overline{V_\alpha}]\} \subseteq \bigcap_{\alpha \in K}(p_\alpha)_{-1}[U_\alpha]\} = U$. Teda $(X, \mathcal{T})$ je regulárny.

Teraz nech pre každé $\alpha \in A$ je $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ úplne regulárny priestor. Použijeme vetu 6.3 a štandardnú subbázu $\mathcal{S}$ súčinovej topológie $\mathcal{T}$. Nech $U = (p_\alpha)_{-1}[U_\alpha] \in \mathcal{S}$ a $c \in U$. Potom $\alpha \in A$, $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ a $p_\alpha(c) \in U_\alpha$. Pretože $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ je úplne regulárny a $\mathcal{T}_\alpha$ je subbáza $\mathcal{T}_\alpha$ existuje spojité zobrazenie $f_\alpha: (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow [0,1]$, pre ktoré $f_\alpha(p_\alpha(c)) = 1$ a $f_\alpha[X_\alpha \setminus U_\alpha] \subseteq \{0\}$. Potom aj zobrazenie $f = f_\alpha \circ p_\alpha: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow [0,1]$ je spojité pričom platí $f(c) = 1$ a $f[X \setminus U] \subseteq \{0\}$. Teda $(X, \mathcal{T})$ je úplne regulárny priestor. $\square$

Príklad 6.1. *V príklade 5.1 sme ukázali, že Sorgenfreyova priamka S je normálny priestor a pretože je to aj T_2-priestor je to T_4-priestor. Teraz ukážeme, že súčin $S \times S$ nie je normálny priestor. Uvažujme o podpriestore $F = \{(a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$ priestoru $S \times S$. Je ľahké nahliadnuť, že F je uzavretý podpriestor priestoru $S \times S$ (ak $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $b \neq -a$, tak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $[a, a+\varepsilon) \times [b, b+\varepsilon) \cap F = \emptyset$). Ďalej, pre každé $(a, -a) \in F$ platí $([a, a+1) \times [-a, -a+1)) \cap F = \{(a, -a)\}$, preto $\{(a, -a)\}$ je otvorená podmnožina F a F je diskrétny priestor. Predpokladajme teraz, že $S \times S$ je normálny priestor a $C \subseteq F$. Potom množiny C a $F \setminus C$ sú uzavreté podmnožiny v F a pretože F je uzavretý podpriestor $S \times S$, sú uzavreté aj v $S \times S$. Súčasne sú aj disjunktné a preto podľa Urysohnovej lemy existuje spojité zobrazenie $f_C: S \times S \longrightarrow [0,1]$, pre ktoré $f[C] \subseteq \{0\}$ a $f[F \setminus C] \subseteq \{1\}$. Je zrejmé, že ak C a D sú podmnožiny F a $C \neq D$, tak $f_C \neq f_D$ a teda existuje aspoň $2^{\mathbf{c}}$ spojitých zobrazení $S \times S$ do $[0,1]$, kde $\mathbf{c} = \mathbf{2}^{\aleph_0}$ je mohutnosť kontinua (kardinálne číslo množiny $\mathbb{R}$). Ale v priestore $S \times S$ je podmnožina $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ zrejme hustá a preto ak spojité zobrazenia $f: S \times S \longrightarrow [0,1]$, $g: S \times S \longrightarrow [0,1]$ sa rovnajú na $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, tak $f = g$. Pretože $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ je spočítateľná, tak z toho vyplýva, že spojitých zobrazení $S \times S$ do $[0,1]$ je najviac $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$. Dostali sme spor. Preto $S \times S$ nie je normálny priestor a teda vidíme, že súčin normálnych priestorov nemusí byť normálny priestor. Na* *druhej strane, pretože S je T_4- priestor, je to aj $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor a podľa predchádzajúcej vety je $S \times S$ $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor. Teda $S \times S$ je aj príkladom $T_{3\frac{1}{2}}$-priestoru, ktorý nie je normálny.*

Veta 6.5. *Ak množina A je spočítateľná a pre každé $\alpha \in A$ má priestor $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ spočítateľnú bázu (priestor $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti, priestor $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ je separabilný), tak aj priestor $(X, \mathcal{T}) = \prod_{\alpha\in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ má spočítateľnú bázu (spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti, je separabilný).*

Dôkaz. Ak $A = \emptyset$ alebo existuje $\alpha \in A$, pre ktoré $X_\alpha = \emptyset$, tak je to zrejmé. Nech $A \neq \emptyset$ a pre všetky α je $X_\alpha \neq \emptyset$.

a) Nech pre každé $\alpha \in A$ je $\mathcal{B}_\alpha$ spočítateľná báza topológie $\mathcal{T}_\alpha$ a $\mathcal{B}_1 = \{V \in \mathcal{P}(X)$: existuje neprázdna konečná podmnožina K množiny A a pre každé $\alpha \in K$ existuje $U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ tak, že $V = \bigcap_{\alpha\in K}(p_\alpha)_{-1}[U_\alpha]\}$. Potom podľa vety 6.1.4) je $\mathcal{B}_1$ báza súčinovej topológie $\mathcal{T}$ a táto báza je spočítateľná.

b) Prípad priestorov spĺňajúcich 1. axiómu spočítateľnosti sa dokáže podobne.

c) Nech pre každé $\alpha \in A$ je $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ separabilný a M_α je spočítateľná hustá podmnožina v $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ a $M = \prod_{\alpha\in A} M_\alpha$. Vyberme $c \in M$ a nech $K = \{x \in M :\ \{\alpha \in A :\ p_\alpha(x) \neq p_\alpha(c)\}$ je konečná $\}$. Potom K je spočítateľná a ukážeme, že je hustá v $(X, \mathcal{T})$. Nech $V = \bigcap_{\alpha\in K}(p_\alpha)_{-1}[U_\alpha]\}$ je neprázdny prvok štandardnej bázy súčinovej topológie v $(X, \mathcal{T})$. Potom pre každé $\alpha \in K$ U_α je neprázdna otvorená podmnožina v $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ a preto $U_\alpha \cap M_\alpha \neq \emptyset$. Vyberme pre každé $\alpha \in K$ $x_\alpha \in U_\alpha \cap M_\alpha$ a nech x je prvok X definovaný predpisom $p_\alpha(x) = x_\alpha$ pre $\alpha \in K$ a $p_\alpha(x) = p_\alpha(c)$ pre $\alpha \in A \setminus K$. Zrejme $x \in K \cap V$ a teda K je hustá v $(X, \mathcal{T})$. □

Poznámka. Pre separabilné priestory platí silnejší výsledok: Ak množina A má mohutnosť kontinua a pre každé $\alpha \in A$ je priestor $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ separabilný, tak aj priestor $(X, \mathcal{T}) = \prod_{\alpha\in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ je separabilný.

Príklad 6.2. *Nech D_2 je diskrétny priestor na množine $\{0,1\}$, A je nespočítateľná množina. Ukážeme, že priestor D_2^A nespĺňa 1. axiómu spočítateľnosti a teda nemá ani spočítateľnú bázu. Nech o je prvok D_2^A, ktorého všetky zložky sú rovné 0. Predpokladajme, že existuje spočítateľná báza okolí V_1, V_2, …, V_n, … bodu o v D_2^A. Pre každé $x \in D_2^A$, $x \neq o$ je $\{x\}$ uzavretá podmnožina v D_2^A, $U = D_2^A \setminus \{x\}$ okolie o a preto existuje $i \in \mathbb{N}$ tak, že $V_i \subseteq U$ a teda $x \notin V_i$. Preto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{o\}$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ môžeme vybrať prvok W_n štandardnej bázy súčinovej topológie priestoru D_2^A tak, že $o \in W_n \subseteq V_n$. Zrejme, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \{o\}$. Pre každé W_n existuje konečná podmnožina $K_n \subseteq A$ tak, že $W_n = \bigcap_{a\in K_n}(p_a)_{-1}[0]$ (pripomeňme, že $o \in W_n$). Množina $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ je spočítateľná a preto $A \setminus K \neq \emptyset$. Nech $c \in A \setminus K$. Potom prvok $y \in D_2^A$, pre ktorý $p_c(y) = 1$ a pre všetky ostatné $a \in A$ $p_a(y) = 0$ patrí do $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ a $y \neq o$. Dostali sme spor a teda priestor D_2^A nemá spočítateľnú bázu okolí v bode o.*

Veta 6.6. *Topologický súčin spočítateľného systému metrizovateľných priestorov je metrizovateľný priestor.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme pre prípad nekonečného spočítateľného systému. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $(X_n, \mathcal{T}_n)$ metrizovateľný priestor a $(X, \mathcal{T}) = \prod_{n\in\mathbb{N}}(X_n, \mathcal{T}_n)$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje metrika d_n na X_n taká, že pre všetky $u, v \in X_n$ je $d_n(u, v) \leq 1$ a topológia $\mathcal{T}_{d_n}$ určená metrikou d_n je totožná s $\mathcal{T}_n$. Na množine $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definujme metriku takto: Pre každé $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in X$ $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$. Ľahko sa overí, že týmto predpisom je skutočne definovaná metrika na X. Ukážeme, že pre topológiu $\mathcal{T}_d$ na X určenú metrikou d platí $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $p_n : (X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (X_n, \mathcal{T}_n)$ je n-tá projekcia daná predpisom $p_n(x) = x_n$. Ak $\varepsilon > 0$, $x, y \in X$ a $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, tak $d_n(x_n, y_n) < \varepsilon$. Preto p_n je spojité zobrazenie pre každé $n \in \mathbb{N}$ a podľa vety 6.1.2) z toho dostávame, že $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$. Nech teraz $U \in \mathcal{T}_d$ a $x \in U$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $O_\varepsilon^d(x) \subseteq U$. Existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Nech $V = O_{\frac{\varepsilon}{2}}^{d_1}(x_1) \times ... \times O_{\frac{\varepsilon}{2}}^{d_{k_0}}(x_{k_0}) \times X_{k_0+1} \times X_{k_0+2} \times ...$. Zrejme V je prvok štandardnej bázy súčinovej topológie $\mathcal{T}$ a preto je to okolie x v $(X, \mathcal{T})$. Ak $y \in V$, tak pre všetky $i \in \{1, ..., k_0\}$ platí $d_i(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $d(x, y) = \frac{1}{2} d_1(x_1, y_1) + ... + \frac{1}{2^{k_0}} d_{k_0}(x_{k_0}, y_{k_0}) + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) \leq (\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{k_0}})\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Teda $V \subseteq O_\varepsilon^d(x) \subseteq U$ a teda $U \in \mathcal{T}$. Dokázali sme, že $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. □

Príklady 6.3. *1) Priestor $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ je metrizovateľný.*

2) Priestor D_2 z predchádzajúceho príkladu je metrizovateľný a ak A je nespočítateľná množina, tak D_2^A nesplňa 1. axiómu spočítateľnosti a preto nie je metrizovateľný.

Veta 6.7. *a) Nech A je množina a pre každé $\alpha \in A$ je $f_\alpha : Y \longrightarrow X_\alpha$ spojité zobrazenie priestoru Y do priestoru X_α. Potom existuje práve jedno spojité zobrazenie $f : Y \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ také, že pre každé $\alpha \in A$ platí $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ (pre každé $\alpha \in A$ je p_α zodpovedajúca projekcia $\prod_{\beta\in A} X_\beta \longrightarrow X_\alpha$). Zobrazenie f sa nazýva diagonálne zobrazenie určené systémom zobrazení $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$.*

b) Nech pre každé $\alpha \in A$, je $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ spojité zobrazenie, $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ je systém projekcií prislúchajúci súčinu $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ a $(p'_\alpha)_{\alpha\in A}$ je systém projekcií prislúchajúci súčinu $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$. Potom existuje práve jedno spojité zobrazenie $f : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ také, že pre každé $\alpha \in A$ platí $p'_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha$.

Dôkaz. a) Pre každé $y \in Y$ definujme $f(y) : A \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ predpisom $f(y)(\alpha) = f_\alpha(y)$. Potom $f(y) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ a máme definované zobrazenie $f : Y \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Pre každé $\alpha \in A$ a každé $y \in Y$ platí $p_\alpha(f(y)) = f(y)(\alpha) = f_\alpha(y)$ a teda $p_\alpha \circ f = f_\alpha$. Pretože pre každé $\alpha \in A$ platí, že $p_\alpha \circ f$ je spojité zobrazenie, dostávame, že f je spojité zobrazenie. Nech $g : Y \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ je tiež spojité zobrazenie, pre ktoré platí $p_\alpha \circ g = f_\alpha$ pre všetky $\alpha \in A$. Potom pre každé $y \in Y$ a $\alpha \in A$ máme $g(y)(\alpha) = p_\alpha(g(y)) = f_\alpha(y) = p_\alpha(f(y)) = f(y)(\alpha)$ a preto $g(y) = f(y)$. Teda $g = f$.

b) Stačí si uvedomiť, že f je diagonálne zobrazenie určené systémom spojitých zobrazení $(p_\alpha \circ f_\alpha)_{\alpha\in A}$. Ostatné už potom vyplýva z a). □

Príklady 6.4. *1) Zobrazenia $f_1, f_2 : [0, 1] \longrightarrow R$ dané predpismi $f_1(t) = cos(2\pi t)$, $f_2(t) = sin(2\pi t)$ sú spojité. Diagonálne zobrazenie určené týmito zo-*

brazeniami je zobrazenie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definované predpisom $f(t) = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$ je potom tiež spojité.

2) Ak X je priestor, tak systém (id_X, id_X) určuje diagonálne zobrazenie $\Delta_X : X \longrightarrow X \times X$ dané predpisom $\Delta_X(x) = (x, x)$.

Veta 6.8. *Nech A je množina a pre každé $\alpha \in A$ je $(M_\alpha, \mathcal{T}_{M_\alpha})$ podpriestor priestoru $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. Potom priestor $(M, \mathcal{T}_M) = \prod_{\alpha\in A}(M_\alpha, \mathcal{T}_{M_\alpha})$ je podpriestor priestoru $(X, \mathcal{T}) = \prod_{\alpha\in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.*

Dôkaz. Označme $\mathcal{T}|_M$ topológiu podpriestoru priestoru $(X, \mathcal{T})$ určeného množinou M. Pre každé $\alpha \in A$ označme p_α projekciu $X \longrightarrow X_\alpha$, p'_α projekciu $M \longrightarrow M_\alpha$ a j_α vloženie $(M_\alpha, \mathcal{T}_{M_\alpha}) \longrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ dané predpisom $j_\alpha(x) = x$. Nech $j : (M, \mathcal{T}_M) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ je súčin systému zobrazení $(j_\alpha)_{\alpha\in A}$. Potom j je spojité zobrazenie, pre každé $z \in M$ platí $j(z) = z$ a $j[M] = M$. Z toho vyplýva, že zobrazenie $id_M : (M, \mathcal{T}_M) \longrightarrow (M, \mathcal{T}|_M)$ je spojité a preto $\mathcal{T}|M \subseteq \mathcal{T}_M$. Pre každé $\alpha \in A$ je $p_\alpha|_M : (M, \mathcal{T}|_M) \longrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ spojité zobrazenie, $p_\alpha|_M[M] = M_\alpha$, pre každé $t \in M$ platí $p_\alpha|_M(t) = p'_\alpha(t)$ a preto je zobrazenie $p'_\alpha : (M, \mathcal{T}|_M) \longrightarrow (M_\alpha, \mathcal{T}_{M_\alpha})$ spojité. Nech $p' : (M, \mathcal{T}|_M) \longrightarrow (M, \mathcal{T}_M)$ je diagonálne zobrazenie určené systémom $(p'_\alpha : (M, \mathcal{T}|_M) \longrightarrow (M_\alpha, \mathcal{T}_{M_\alpha}))_{\alpha\in A}$. Potom p' je spojité, $p' = id_M$ a preto $\mathcal{T}_M \subseteq \mathcal{T}|_M$. Teda $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}|_M$. □

Príklady 6.5. *1) Pre každú množinu A je priestor $[0,1]^A$ podpriestor priestoru $\mathbb{R}^A$.*

2) Ak A je nespočítateľná množina, tak priestor $\mathbb{R}^A$ ($[0,1]^A$) nesplňa 1. axiómu spočítateľnosti a teda nie je metrizovateľný. Vyplýva to z toho, že priestor D_2^A (D_2 je diskrétny priestor na množine $\{0,1\}$) je podpriestorom priestoru $\mathbb{R}^A$ ($[0,1]^A$), a nesplňa 1 axiómu spočítateľnosti.

3) Ak si uvedomíme, že aj súčin ľubovoľného nespočítateľného systému dvojprvkových diskrétnych priestorov nesplňa 1. axiómu spočítateľnosti a každý metrizovateľný priestor, ktorý má aspoň dva prvky obsahuje dvojprvkový diskrétny podpriestor, tak z toho dostaneme, že súčin nespočítateľného systému metrizovateľných priestorov, z ktorých každý má aspoň dva prvky nie je metrizovateľný priestor.

Teraz uvedieme postačujúcu podmienku k tomu, aby diagonálne zobrazenie bolo vloženie.

Veta 6.9. *Nech X je T_0-priestor, $(f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha)_{\alpha\in A}$ je neprázdny systém spojitých zobrazení, $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ je topologický súčin, pre všetky α je p_α projekcia $Y \longrightarrow Y_\alpha$ a $f : X \longrightarrow Y$ je diagonálne zobrazenie určené systémom $(f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha)_{\alpha\in A}$. Nech daný systém spojitých zobrazení má nasledujúcu vlastnosť: Ak B je uzavretá podmnožina v X a $c \in X \backslash B$, tak existuje $\alpha \in A$ tak, že $f_\alpha(c) \notin \overline{f_\alpha[B]}$. Potom f je vloženie.*

Dôkaz. Stačí ukázať, že f je prosté a že pre každú uzavretú podmnožinu B priestoru X je $f[B]$ uzavretá v podpriestore $f[X]$ priestoru Y. Nech $a, b \in X$, $a \neq b$. Nech napríklad existuje otvorená podmnožina U v X taká, že $a \in U$ a $b \notin U$. Potom $C = X \backslash U$ je uzavretá v X, $b \in C$ a $a \notin C$. Podľa predpokladu existuje

$\alpha \in A$, pre ktoré $f_\alpha(a) \notin \overline{f_\alpha[C]}$. Pretože $f_\alpha(b) \in f_\alpha[C]$, máme $p_\alpha(f(a)) = f_\alpha(a) \neq f_\alpha(b) = p_\alpha(f(b))$ a preto $f(a) \neq f(b)$. Teda f je prosté.

Nech teraz B je uzavretá podmnožina X a $d \in \overline{f[X]\backslash f[B]}$. Potom existuje práve jedno $c \in X$také, že $f(c) = d$. Zrejme $c \notin B$ a preto existuje $\alpha \in A$ tak, že $f_\alpha(c) = p_\alpha(f(c)) = p_\alpha(d) \notin \overline{f_\alpha[B]} = \overline{p_\alpha[f[B]]}$. Preto existuje otvorené okolie V bodu $p_\alpha(d)$ v Y_α také, že $V \cap p_\alpha[B] = \emptyset$. Potom $d \in (p_\alpha)_{-1}[V]$, $(p_\alpha)_{-1}[V]$ je otvorená v Y a $(p_\alpha)_{-1}[V] \cap f[B] = \emptyset$. Množina $W = (p_\alpha)_{-1}[V] \cap f[X]$ je otvorené okolie d v podpriestore $f[X]$ priestoru Y a $W \cap f[B] = \emptyset$. Preto $f[B]$ je uzavretá v $f[X]$ a teda f je vloženie. □

Túto vetu teraz využijeme pri dôkaze vety o reprezentácii $T_{3\frac{1}{2}}$-priestorov.

Veta 6.10. *Topologický priestor X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor práve vtedy, keď existuje množina A tak, že X je homeomorfný s nejakým podpriestorom priestoru $[0,1]^A$.*

Dôkaz. Nech X je $T_3\frac{1}{2}$-priestor a $\mathbb{C}(X,[0,1])$ je množina všetkých spojitých zobrazení priestoru X do priestoru $[0,1]$. Tento systém zobrazení určuje diagonálne zobrazenie $h: X \longrightarrow [0,1]^{\mathbb{C}(X,[0,1])}$ o ktorom ukážeme, že je to vloženie. Nech B je uzavretá podmnožina X a $c \in X\backslash B$. Potom existuje $f \in \mathbb{C}(X,[0,1])$ tak, že $f(c) = 1$ a $f[B] \subseteq \{0\}$. Zrejme $\overline{f[B]} \subseteq \{0\}$ ($\{0\}$ je uzavretá podmnožina v $[0,1]$) a preto $f(c) \notin \overline{f[B]}$. Teda systém $\mathbb{C}(X,[0,1])$ spĺňa podmienku z predchádzajúcej vety a preto zobrazenie h je vloženie. Potom X je homeomorfný s podpriestorom $h[X]$ priestoru $[0,1]^{\mathbb{C}(X,[0,1])}$.

Obrátene, nech existuje množina A tak, že X je homeomorfný s nejakým podpriestorom Y priestoru $[0,1]^A$. Pretože priestor $[0,1]$ je $T_3\frac{1}{2}$-priestor, je aj priestor $[0,1]^A$ a tiež jeho podpriestor Y $T_3\frac{1}{2}$-priestorom (veta 6.4, veta 5.3). Pretože X je homeomorfný s Y je aj X $T_3\frac{1}{2}$-priestor. □

7 Faktorové priestory, faktorové zobrazenia

Ďalšou základnou konštrukciou topologických priestorov je faktorizácia. Jej základom je nasledujúca veta:

Veta a definícia 7.1. *Nech $(X,\mathcal{T})$ je topologický priestor, Y je množina a $f: X \longrightarrow Y$ je surjektívne zobrazenie. Potom $\mathcal{T}_f = \{U \in \mathcal{P}(Y) : f_{-1}[U] \in \mathcal{T}\}$ je topológia na Y a platí:*

(1) $f: (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (Y,\mathcal{T}_f)$ je spojité zobrazenie.

(2) Ak $(Z,\mathcal{T}_Z)$ je topologický priestor a $g: (Y,\mathcal{T}_f) \longrightarrow (Z,\mathcal{T}_Z)$ je zobrazenie, tak g je spojité práve vtedy, keď $g \circ f$ je spojité.

(3) Ak $B \subseteq Y$ a $f_{-1}[B]$ je uzavretá v $(X,\mathcal{T})$, tak B je uzavretá v $(Y,\mathcal{T}_f)$.

Topológia $\mathcal{T}_f$ sa nazýva faktorová topológia na Y určená zobrazením f a topológiou $\mathcal{T}$.

Dôkaz. Ľahko sa overí, že $\mathcal{T}_f$ je topológia na Y a spojitosť f je zrejmá z definície $\mathcal{T}_f$.

(2) Nech $g \circ f$ je spojité zobrazenie a nech $W \in \mathcal{T}_Z$. Potom $f_{-1}[g_{-1}[W]] = (g \circ f)_{-1}[W] \in \mathcal{T}$. Z definície $\mathcal{T}_f$ dostávame, že $g_{-1}[W] \in \mathcal{T}_f$. Obrátene, ak g je spojité tak aj $g \circ f$ je spojité (lebo f je spojité).

(3) Zrejmé. □

Poznámka. Táto veta platí aj bez predpokladu, že f je surjektívne. V takomto prípade sa $\mathcal{T}_f$ nazýva *finálna topológia na Y určená zobrazením f a topológiou $\mathcal{T}$.*

Definícia 7.1. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, E je relácia ekvivalencie na X, $E(x) = \{y \in X : (x, y) \in E\}$ je trieda ekvivalencie určená prvkom $x \in X$, $X|_E = \{E(x) : x \in X\}$ je rozklad X na triedy ekvivalencie E, $p_E : X \longrightarrow X|_E$; $p_E(x) = E(x)$ je prirodzená projekcia X na $X|_E$ a $\mathcal{T}_{p_E}$ je faktorová topológia na $X|_E$ určená zobrazením p_E a topológiou $\mathcal{T}$. Potom priestor $(X|_E, \mathcal{T}_{p_E})$ sa nazýva faktorový priestor priestoru $(X, \mathcal{T})$ určený reláciou ekvivalencie E a označuje sa $(X, \mathcal{T})|_E$.*

Príklady 7.1. *1) Majme priestor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ a reláciu ekvivalencie $\sim$ na $\mathbb{R}$ definovanú takto: $x \sim y$ práve vtedy, keď $x, y \in \mathbb{Q}$ alebo $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Potom $\mathbb{R}|_\sim = \{Q, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$ a faktorový priestor určený reláciou $\sim$ je dvojprvkový indiskrétny priestor.*

2) Uvažujme o priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ a relácii ekvivalencie $\sim$ na $\mathbb{R}$ definovanej takto: $x \sim y$ práve vtedy, keď $x = y$ alebo $x, y \in \mathbb{N}$. Potom $\mathbb{R}|_\sim = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\}$. Označme p prirodzenú projekciu $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}|_\sim$. Topológiu $\mathcal{T}_p$ faktorového priestoru $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$ určíme pomocou báz okolí bodov. Nech $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ a r_x je vzdialenosť bodu x od najbližšieho prirodzeného čísla. Ak $\varepsilon > 0$ a $\varepsilon \leq r_x$, tak $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ a preto $p_{-1}[p[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)]] = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Teda $p[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)]$ je otvorené okolie bodu $p(x) = \{x\}$ v priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$. Nech $U \in \mathcal{T}_p$ a $\{x\} \in U$. Potom $x \in p_{-1}[U]$ a $p_{-1}[U] \in \mathcal{T}_{nat}$. Preto existuje $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq r_x$ tak, že $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq p_{-1}[U]$. Potom $p[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)] \subseteq U$ a teda systém $\mathcal{B}_{\{x\}} = \{p[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)] : 0 < \varepsilon \leq r_x\}$ je báza okolí bodu $\{x\}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$. Teraz uvažujme o bode $\mathbb{N} \in \mathbb{R}|_\sim$. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je dané ε_n tak, že $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ a $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n-\varepsilon_n, n+\varepsilon_n)$. Potom $V \in \mathcal{T}_{nat}$, $\mathbb{N} \subseteq V$, $p_{-1}[p[V]] = V$ a $p(1) = \mathbb{N} \in p[V]$ (lebo $1 \in V$). Teda $p[V]$ je otvorené okolie bodu $\mathbb{N}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$. Nech teraz $U \in \mathcal{T}_p$ a $\mathbb{N} \in U$. Potom $p_{-1}[U] \in \mathcal{T}_{nat}$ a $\mathbb{N} \subseteq p_{-1}[U]$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje ε_n tak, že $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ a $(n-\varepsilon_n, n+\varepsilon_n) \subseteq p_{-1}[U]$. Potom ak $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n-\varepsilon_n, n+\varepsilon_n)$, tak $V \subseteq p_{-1}[U]$ a preto $p[V] \subseteq U$. Teda systém $\mathcal{B}_\mathbb{N} = \{p[V] = p[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n-\varepsilon_n, n+\varepsilon_n)] :$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2}\}$ je báza okolí bodu $\mathbb{N}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_p)$.

Všimnime si teraz vlastnosti priestoru $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_p)$. Je zrejmé, že pre každé $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ je $\mathcal{B}'_{\{x\}} = \{p[(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n})] : 0 < \frac{1}{n} \leq r_x\}$ spočítateľná báza okolí bodu $\{x\}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_p)$. Ukážeme, že bod $\mathbb{N}$ nemá spočítateľnú bázu okolí. Nech $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ je spočítateľná báza okolí bodu $\mathbb{N}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_p)$. Pre každé $k \in \mathbb{N}$ vyberme $p[V_k] = p[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n-\varepsilon_n^k, n+\varepsilon_n^k)] \in \mathcal{B}_\mathbb{N}$ také, že $p[V_k] \subseteq U_k$. Nech $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n-\frac{\varepsilon_n^n}{2}, n+\frac{\varepsilon_n^n}{2})$. Potom $p[V] \in \mathcal{B}_\mathbb{N}$ a teda je to okolie bodu $\mathbb{N}$. Pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí $k+\frac{\varepsilon_k^k}{2} \in V_k\backslash V$

a pretože $k + \frac{\varepsilon_k^k}{2} \notin \mathbb{N}$ *platí* $p(k + \frac{\varepsilon_k^k}{2}) \in p[V_k] \backslash p[V]$ *a teda* $p[V_k] \nsubseteq p[V]$*. Dostali sme spor.*

Priestor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$ *nespĺňa 1. axiómu spočítateľnosti a preto nemá ani spočítateľnú bázu a nie je metrizovateľný. Zrejme* $p[\mathbb{Q}]$ *je hustá v* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$ *(*$\mathbb{R}|_\sim = p[\mathbb{R}] = p[\overline{\mathbb{Q}}] \subseteq \overline{p[\mathbb{Q}]}$*) a teda* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$ *je separabilný priestor.*

Zobrazenie p *je uzavreté zobrazenie. Ak* $B \subseteq \mathbb{R}$ *je uzavretá podmnožina v* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$*, tak* $p_{-1}[p[B]] = B$ *alebo* $p_{-1}[p[B]] = B \cup \mathbb{N}$ *je tiež uzavretá v* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ *a preto* $p[B]$ *je uzavretá v* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$ *(veta a definícia 7.1). Priestor* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ *je* T_4*-priestor a pretože* $p: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$ *je uzavreté, spojité a surjektívne, priestor* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_\sim$ *je tiež* T_4*-priestor (pozri cvičenie 3.8.(b) v [4]).*

S pojmom faktorového priestoru úzko súvisí pojem faktorového zobrazenia.

Definícia 7.2. *Spojité zobrazenie* $f: X \longrightarrow Y$ *sa nazýva faktorové zobrazenie, ak je surjektívne a platí: Ak* V *je podmnožina* Y *a* $f_{-1}[V]$ *je otvorená podmnožina v* X*, tak* V *je otvorená v* Y*.*

Je zrejmé, že platí:

Veta 7.1. *1) Spojité surjektívne zobrazenie je faktorové práve vtedy, keď platí: Ak* B *je podmnožina* Y *a* $f_{-1}[B]$ *je uzavretá v* X*, tak* B *je uzavretá v* Y*.*

2) Každé spojité surjektívne otvorené (uzavreté) zobrazenie je faktorové.

Príklady 7.2. *1) Nech* $S_2 = (\{0,1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0.1\}\}$ *je Sierpiského priestor. Zobrazenie* $f: \mathbb{R} \longrightarrow S_2$ *definované predpisom* $f(x) = 0$ *pre* $x < 0$ *a* $f(x) = 1$ *pre* $x \geq 0$ *je faktorové zobrazenie, ktoré nie je ani otvorené ani uzavreté.*

2) Nech S^1 *je podpriestor* $\mathbb{R}^2$ *určený množinou* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$*. Potom zobrazenie* $f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ *dané predpisom* $f(t) = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$ *je spojité, surjektívne aj otvorené (otvorené intervaly tvoria bázu topológie v* $\mathbb{R}$ *a ich obrazy v tomto zobrazení sú otvorené množiny v* S^1*) a preto je to faktorové zobrazenie.*

3) Zobrazenie p *z príkladu 7.1.2) je spojité, surjektívne aj uzavreté a preto je to faktorové zobrazenie.*

Veta 7.2. *1)Zobrazenie* $f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ *je faktorové práve vtedy, keď* f *je surjektívne a* $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_f$*, kde* $\mathcal{T}_f$ *je faktorová topológia určená zobrazením* f *a topológiou* $\mathcal{T}_X$*.*

2) Ak E *je relácia ekvivalencie na priestore* $(X, \mathcal{T})$*, tak prirodzená projekcia* $p_E: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})|_E$ *je faktorové zobrazenie.*

3) Ak $f: X \longrightarrow Y$ *a* $g: Y \longrightarrow Z$ *sú faktorové zobrazenia, tak aj* $g \circ f: X \longrightarrow Z$ *je faktorové zobrazenie.*

4) Ak $f: X \longrightarrow Y$ *je faktorové zobrazenie a* $g: Y \longrightarrow Z$ *je zobrazenie priestoru* Y *d priestoru* Z *tak* g *je spojité práve vtedy, keď* $g \circ f$ *je spojité.*

Dôkaz. 1) Nech f je faktorové zobrazenie. Potom f je surjektívne a pre každé $V \subseteq Y$ platí $V \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow f_{-1}[V] \in \mathcal{T}_X \Leftrightarrow V \in \mathcal{T}_f$. Teda $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_f$. Obrátene, nech f je surjektívne a $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_f$. Potom f je spojité (veta a definícia 7.1.(1))) a ak $V \subseteq Y$ a $f_{-1}[V] \in \mathcal{T}_X$, tak $V \in \mathcal{T}_f = \mathcal{T}_Y$. Teda f je faktorové zobrazenie.

2) Vyplýva z 1).

3) Zrejme $g \circ f$ je spojité a surjektívne. Nech $W \subseteq Z$ a $(g \circ f)_{-1}[V] = f_{-1}[g_{-1}[V]]$ je otvorená v X. Potom, pretože f je faktorové, platí $g_{-1}[V]$ je otvorená v Y a pretože g je faktorové, dostávame, že V je otvorená v Z. Teda $g \circ f$ je faktorové zobrazenie.

4) Vyplýva z 1) a vety a def. 7.1.(2). □

Príklad 7.1. *Nech* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *je podpriestor priestoru* $\mathbb{R}^2$ *(s prirodzenou topológiou). Zobrazenie* $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ *definované predpisom* $f(t) = (cos(2\pi t), sin(2\pi t)$ *je spojité, surjektívne a otvorené (pozri príklady 7.2.2)). Preto je* f *faktorové zobrazenie. Nech* $E_f = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f(u) = f(v)\}$ *je jadro zobrazenia* f*. Potom* E_f *je relácia ekvivalencie na* $\mathbb{R}$*. Nech* $\mathbb{R}|_{E_f}$ *je faktorový priestor priestoru* $\mathbb{R}$ *určený* E_f *a* $p_{E_f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}|_{E_f}$ *je príslušná prirodzená projekcia (množina bodov priestoru* $\mathbb{R}|_{E_f}$ *je množina* $\{r + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{R}\} = \{r + \mathbb{Z} : r \in [0, 1)\}$*). Potom* p_{E_f} *je faktorové zobrazenie a pre zobrazenie* $\overline{f} : \mathbb{R}|_{E_f} \longrightarrow S^1$ *definované predpisom* $\overline{f}(r + \mathbb{Z}) = f(r)$ *platí, že je bijektívne a* $\overline{f} \circ p_{E_f} = f$*. Pretože* $\overline{f} \circ p_{E_f} = f$ *je spojité a* p_{E_f} *je faktorové zobrazenie, dostávame, že* $\overline{f}$ *je spojité. Pretože* $(\overline{f})^{-1} \circ f = p_{E_f}$ *je spojité a* f *je faktorové zobrazenie, dostávame, že* $(\overline{f})^{-1}$ *je spojité. Teda* $\overline{f} : \mathbb{R}|_{E_f} \longrightarrow S^1$ *je homeomorfizmus.*

Situáciu z predchádzajúceho príkladu zovšeobecňuje nasledujúca veta.

Veta 7.3. *Nech* $f : X \longrightarrow Y$ *je spojité zobrazenie,* $E_f = \{(x, y) \in X \times X : f(x) = f(y)\}$ *je jadro zobrazenia* f *a* $X|_{E_f}$ *je faktorový priestor určený* E_f*. Potom zobrazenie* $\overline{f} : X|_{E_f} \longrightarrow Y$ *dané predpisom* $\overline{f}(E_f(x)) = f(x)$ *je injektívne spojité zobrazenie. Ak* f *je faktorové zobrazenie, tak* $\overline{f}$ *je homeomorfizmus.*

Dôkaz. Nech $p_{E_f} : X \longrightarrow X|_{E_f}$ je prirodzená projekcia. Potom $\overline{f} \circ p_{E_f} = f$ je spojité zobrazenie, p_{E_f} je faktorové zobrazenie a preto $\overline{f}$ je spojité. Ak $E_f(x) \neq E_f(y)$ tak $f(x) \neq f(y)$ a preto $\overline{f}(E_f(x)) \neq \overline{f}(E_f(y))$. Teda $\overline{f}$ je aj injektívne. Ak f je faktorové zobrazenie, potom f je surjektívne a potom aj $\overline{f}$ je surjektívne. Preto je $\overline{f}$ bijektívne, $(\overline{f})^{-1} \circ f = p_{E_f}$ je spojité, f je faktorové a preto $(\overline{f})^{-1}$ je spojité. Teda $\overline{f}$ je homeomorfizmus. □

Dôsledok 7.1. *Pre každé spojité zobrazenie* $f : X \longrightarrow Y$ *existuje faktorové zobrazenie* $g : X \longrightarrow Z$ *a injektívne spojité zobrazenie* $m : Z \longrightarrow Y$ *tak, že* $f = m \circ g$*.*

Príklady 7.3. *1) Nech* E *je relácia ekvivalencie na priestore* $[0, 1]^2$ *definovaná predpisom* $((x, y), (u, v)) \in E \Leftrightarrow x, u \in \{0, 1\}$ *a* $y = v$*. Potom faktorový priestor* $[0, 1]^2|_E$ *je homeomorfný s priestorom* $S^1 \times [0, 1]$*. Skutočne, nech* $g : [0, 1]^2 \longrightarrow S^1 \times [0, 1]$ *je zobrazenie dané predpisom* $g(x, y) = ((cos(2\pi x), sin(2\pi x), y)$*. Potom* g *je spojité, surjektívne a uzavreté. Uzavretosť zobrazenia sa ľahko overí pomocou niektorých vlastností kompaktných priestorov z 9. časti tohoto textu. Priestor* $[0, 1]^2$ *je kompaktný a priestor* $S^1 \times [0, 1]$ *je* T_2*-priestor. Každá uzavretá* *podmnožina kompaktného priestoru je kompaktná (veta 9.6), spojitý obraz kompaktnej podmnožiny je kompaktná podmnožina (veta 9.11) a kompaktná podmnožina v T_2-priestore je uzavretá (veta 9.8). Preto je g faktorové zobrazenie. Je zrejmé, že pre jadro E_g zobrazenia g platí $E_g = E$ a preto priestor $[0,1]^2|_E$ je homeomorfný s priestorom $S^1 \times [0,1]$.*

2) Nech E je relácia ekvivalencie na priestore $[0,1]^2$ definovaná predpisom $((x,y),(u,v)) \in E$ práve vtedy, keď $x,u \in \{0,1\}$ a $y = v$ alebo $x = u$ a $y,v \in \{0,1\}$. Potom faktorový priestor $[0,1]^2|_E$ je homeomorfný s priestorom $S^1 \times S^1$. Zoberme zobrazenie $h: [0,1]^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$ dané predpisom $h(x,y) = ((cos(2\pi x), sin(2\pi x), (cos(2\pi y), sin(2\pi y))$. Ďalší postup je podobný ako v 1): h je spojité, surjektívne a uzavreté, teda je faktorové, pre jadro E_h platí $E_h = E$ a preto je priestor $[0,1]^2|_E$ je homeomorfný s priestorom $S^1 \times S^1$.

8 Súčty topologických priestorov

Ďalšou základnou topologickou konštrukciou je konštrukcia súčtu topologických priestorov (topologického súčtu).

Definícia 8.1. *Nech $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha))_{\alpha \in A}$ je systém topologických priestorov a pre každé $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, je $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$. Nech $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ a $\mathcal{T}$ je topológia na X daná bázou $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$. Potom priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva (topologický) súčet systému $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha))_{\alpha \in A}$, označuje sa $\sum_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, v prípade dvoch priestorov $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ ich súčet označujeme $(X_1, \mathcal{T}_1) + (X_2, \mathcal{T}_2)$.*

Príklady 8.1. *1) Podpriestor $[0,1] \cup (2,3)$ priestoru $\mathbb{R}$ je súčtom podpriestorov $[0,1]$ a $(2,3)$ priestoru $\mathbb{R}$, podpriestor $[0,2)$ priestoru $\mathbb{R}$ nie je súčtom podpriestorov $[0,1]$ a $(1,2)$ priestoru $\mathbb{R}$.*

2) Podpriestor $M = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}}(a, a+1)$ priestoru $\mathbb{R}$ je súčtom systému podpriestorov $((a, a+1))_{a \in \mathbb{Z}}$ priestoru $\mathbb{R}$.

3) Každý diskrétny priestor je súčtom systému všetkých jeho jednoprvkových podpriestorov.

4) Ak $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha))_{\alpha \in A}$ je rozklad priestoru $(X, \mathcal{T})$ na navzájom disjunktné otvorené podpriestory, tak $(X, \mathcal{T}) = \sum_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.

Veta 8.1. *(Vlastnosti topologických súčtov) Nech $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha))_{\alpha \in A}$ je systém navzájom disjunktných topologických priestorov a $(X, \mathcal{T}) = \sum_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. Potom platí:*

1) Množina U je otvorená (uzavretá) v $(X, \mathcal{T})$ práve vtedy, keď pre každé $\alpha \in A$ je množina $U \cap X_\alpha$ otvorená (uzavretá) v $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.

2) Pre každé $\alpha \in A$ je priestor $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ otvorený a súčasne uzavretý podpriestor priestoru $(X, \mathcal{T})$.

3) Ak $c \in X_\alpha$ a $\mathcal{B}(c)$ je báza okolí bodu c v priestore $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, tak $\mathcal{B}(c)$ je aj báza okolí bodu c v priestore $(X, \mathcal{T})$.

4) Zobrazenie $f: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ je spojité práve vtedy, keď pre každé $\alpha \in A$ je zobrazenie $f|_{X_\alpha}: (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ spojité.

5) Ak pre každé $\alpha \in A$ je $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ T_i-priestor, $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$, (regulárny, úplne regulárny, normálny, metrizovateľný), tak aj priestor $(X, \mathcal{T})$ je T_i-priestor (regulárny, úplne regulárny, normálny, metrizovateľný).

Dôkaz. Cvičenie. □

Nech teraz $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha))_{\alpha \in A}$ je ľuboboľný systém topologických priestorov. Pre každé $\alpha \in A$ je súčin $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \times \{\alpha\}$ priestoru $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ a jednoprvkového priestoru $\{\alpha\}$ homeomorfný s priestorom $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ (zobrazenie $h_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \times \{\alpha\}$ definované predpisom $h_\alpha(x) = (x, \alpha)$ je homeomorfizmus). Potom priestor $(X, \mathcal{T}) = \sum_{\alpha \in A}((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \times \{\alpha\})$ sa nazýva (topologický) súčet systému $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha))_{\alpha \in A}$. Je zrejmé, že pre každé $\alpha \in A$ je zobrazenie $m_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ definované predpisom $m_\alpha(x) = (x, \alpha)$ vloženie na otvorený a súčasne uzavretý podpriestor $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \times \{\alpha\}$ priestoru $(X, \mathcal{T})$.

9 Kompaktné priestory

Trieda kompaktných T_2-priestorov je jednou z najvýznamnejších tried topologických priestorov. Patria do nej napríklad všetky ohraničené a uzavreté podpriestory metrických priestorov $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrikou (kde $n \in \mathbb{N}$).

Definícia 9.1. *1) Systém $\mathcal{S}$ podmnožín topologického priestoru X sa nazýva pokrytie priestoru X (podmnožiny A priestoru X) ak $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = X$ ($A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$). Ak všetky prvky systému $\mathcal{S}$ sú otvorené podmnožiny priestoru X, tak $\mathcal{S}$ sa nazýva otvorené pokrytie priestoru X (podmnožiny A).*

2) Priestor X sa nazýva kompaktný, ak pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ existuje konečný systém $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ taký, že $\mathcal{U}'$ je pokrytie X.

3) Podmnožina K priestoru X sa nazýva kompaktná, ak podpriestor priestoru X určený množinou A je kompaktný priestor.

Príklady 9.1. *1) Každý indiskrétny priestor, konečný priestor a každý priestor s kofinitnou topológiou je kompaktný.*

2) Priestor $[0, 1]$ s prirodzenou topológiou je kompaktný T_2-priestor.

3) Priestor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ nie je kompaktný. Systém $\mathcal{U} = \{(-\infty, n) : n \in \mathbb{N}\}$ je otvorené pokrytie priestoru $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, pričom žiadny konečný podsystém systému $\mathcal{U}$ nie je pokrytím $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$.

Veta 9.1. *Nech A je podmnožina priestoru X. Potom A je kompaktná práve vtedy, keď pre ľubovoľné pokrytie $\mathcal{S}$ podmnožiny A otvorenými podmnožinami priestoru X existuje konečné pokrytie $\mathcal{S}'$ také, že $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$.*

Dôkaz. $\Rightarrow$: Nech $\mathcal{S}$ je pokrytie A otvorenými podmnožinami priestoru X. Potom $\mathcal{U} = \{S \cap A : S \in \mathcal{S}\}$ je otvorené pokrytie podpriestoru A a existuje $\mathcal{U}' = \{S_1 \cap A, ...S_k \cap A\} \subseteq \mathcal{U}$ $(k \in \mathbb{N})$ tak, že $\mathcal{U}'$ je pokrytie priestoru A. Zrejme $\mathcal{S}' = \{S_1, ..., S_k\} \subseteq \mathcal{S}$ a $A \subseteq S_1 \cup ... \cup S_k$.

$\Leftarrow$: Nech $\mathcal{V}$ je otvorené pokrytie priestoru A. Pre každé $V \in \mathcal{V}$ vyberme otvorenú podmnožinu U_V priestoru X tak, že $U_V \cap A = V$. Potom $\mathcal{U} = \{U_V : V \in \mathcal{V}\}$

je pokrytie A otvorenými podmnožinami priestoru X a existujú $V_1, ..., V_k \in \mathcal{V}$ ($k \in \mathbb{N}$) tak, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{V_i}$. Potom $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ a $\{V_1, ..., V_k\} \subseteq \mathcal{V}$. □

Teraz ukážeme, že v definícii kompaktného priestoru ju možné ľubovoľné otvorené pokrytie nahradiť pokrytím prvkami danej subbázy topológie.V dôkaze príslušnej vety použijeme Zornovu lemu, ktorá síce nepatrí do všeobecnej topológie ale pre úplnosť ju tu uvedieme. Pripomeňme, že ak $(P, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina, tak podmnožina C množiny P sa nazýva reťazec v $(P, \leq)$, ak čiastočné usporiadanie množiny C indukované čiastočným usporiadaním $\leq$ množiny P je usporiadanie množiny C, t. j. pre každé $x, y \in C$ platí $x \leq y$ alebo $y \leq x$ (napríklad $\emptyset$ a všetky jednoprvkové podmnožiny množiny P sú reťazce v $(P, \leq)$).

Veta 9.2. *(Zornova lema). Ak $(P, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina, v ktorej každý reťazec je zhora ohraničený, tak v $(P, \leq)$ existuje maximálny prvok.*

Dôkaz. [2] Ak $P = \emptyset$, tak veta zrejme platí. Nech $P \neq \emptyset$. Označme $\mathcal{R}$ množinu všetkých reťazcov v $(P, \leq)$. Ak utvoríme reťazec v $(P, \leq)$, ktorý má len jedno horné ohraničenie, tak toto ohraničenie je zrejme maximálny prvok v $(P, \leq)$. Nech pre každé $C \in \mathcal{R}$ C^h označuje množinu všetkých horných ohraničení C v $(P, \leq)$, ktoré nie sú prvkami C a $\mathcal{S} = \{C^h : C \in \mathcal{R}, C^h \neq \emptyset\}$. Z axiómy výberu vyplýva, že existuje výberová funkcia $f : \mathcal{S} \longrightarrow \bigcup_{C^h \in \mathcal{S}} C^h$ taká, že $f(C^h) \in C^h$ pre každé $C^h \in \mathcal{S}$. Reťazec $K \in \mathcal{R}$ nazveme f-reťazec, ak $K \neq \emptyset$ a platí: Ak $C \in \mathcal{R}$, $C \subseteq K$ a $C^h \cap K \neq \emptyset$, tak $f(C^h)$ je najmenší prvok v $C^h \cap K$. Napríklad, $\{f(\emptyset^h)\}$ je f-reťazec a pre každý f-reťazec K je $f(\emptyset^h)$ najmenší prvok v K. Všimnime si nasledujúce vlastnosti f-reťazcov:

(1) Ak K je f-reťazec a $K^h \neq \emptyset$, tak $K_1 = K \cup \{f(K^h)\}$ je tiež f-reťazec.

Nech $C \in \mathcal{R}$, $C \subseteq K_1$ a $C^h \cap K_1 \neq \emptyset$ Potom $C^h \cap K \neq \emptyset$ alebo $C^h \cap K = \emptyset$. Ak $C^h \cap K \neq \emptyset$ a $d \in C^h \cap K$, tak pre každé $x \in C$ je $x < d < f(K^h)$ a teda $C \subseteq K$. Potom $f(C^h)$ je najmenší prvok v $C^h \cap K$ a pretože $f(C^h) < f(K^h)$ ($f(C^h) \in K$), $f(C^h)$ je aj najmenší prvok v $C^h \cap K_1$. Ak $C^h \cap K = \emptyset$, tak $C^h \cap K_1 = \{f(K^h)\}$, a potom $C \subseteq K$ a pre každé $x \in K$ existuje $y \in C$ tak, že $x \leq y$ (v opačnom prípade by existovalo $x \in K$ tak, že pre všetky $y \in C$ platí $y < x$ a teda $x \in C^h \cap K$). Preto $K^h = C^h$ a prvok $f(C^h) = f(K^h)$ je najmenší prvok v $C^h \cap K_1 = \{f(K^h)\}$.

(2) Ak K, K' sú f-reťazce a $d \in K' \backslash K$, tak $d \in K^h$.

Nech $C = \{x \in K \cap K' : x < d\}$. Potom $C \in \mathcal{R}$ a $d \in C^h \cap K'$. Potom (pretože $C \subseteq K'$) $f(C^h) \in C^h \cap K'$ a $f(C^h) \leq d$. Ak $f(C^h) \in K$, tak $f(C^h) \in K \cap K' = C$, čo nie je možné. Preto $C^h \cap K = \emptyset$ a pre každé $x \in K$ existuje $y \in C$ tak, že $x \leq y$. Potom pre každé $x \in K$ platí $x < f(C^h) \leq d$ a teda $d \in K^h$.

Nakoniec, nech K_0 je zjednotenie všetkých f-reťazcov. Ukážeme, že K_0 je f- reťazec a $K_0^h = \emptyset$. Nech $x, y \in K_0$. Potom existujú f-reťazce K, K' tak, že $x \in K$, $y \in K'$. Ak $y \in K$, tak $x \leq y$ alebo $y \leq x$. Ak $y \in K' \backslash K$, tak podľa (2) platí $x < y$. Teda K_0 je reťazec. Pretože každý f-reťazec obsahuje $f(\emptyset^h)$, $K_0 \neq \emptyset$. Nech $C \in \mathcal{R}$, $C \subseteq K_0$, $C^h \cap K_0 \neq \emptyset$ a nech $d \in C^h \cap K_0$. Potom existuje f-reťazec K tak, že $d \in C^h \cap K$. Ukážeme, že $C \subseteq K$. Nech $a \in C$.

Potom $a < d$, $d \in K$ a $a \in K_0$. Nech $a \notin K$. Potom existuje f-reťazec K' tak že $a \in K' \backslash K$. Podľa (2) potom $a \in K^h$ a teda $d < a$ čo dáva spor. Teda $a \in K$ a preto $C \subseteq K$. Súčasne $C^h \cap K \neq \emptyset$ a preto $f(C^h)$ je najmenší prvok v $C^h \cap K$. Potom $f(C^h) \leq d$, pričom d bol ľubovoľný prvok množiny $C^h \cap K_0$. Teda $f(C^h)$ je najmenší prvok $C^h \cap K_0$ a K_0 je f-reťazec. Ak $K_0^h \neq \emptyset$, tak $K_1 = K_0 \cup \{f(K_0^h)\}$ je podľa (1) f-reťazec, ktorý nie je podmnožinou množiny K_0, čo je v spore s definíciou K_0. Teda $K_0^h = \emptyset$ a K_0 má jediné horné ohraničenie m, ktoré je najväčším prvkom K_0. Tento prvok je zrejme maximálnym prvkom v $(P, \leq)$ (ak $x \in P$ a $m < x$, tak $x \in K_0^h = \emptyset$).

□

Veta 9.3. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je subbáza $\mathcal{T}$. Potom $(X, \mathcal{T})$ je kompaktný práve vtedy, keď pre ľubovoľné pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ existuje konečné pokrytie $\mathcal{V}$ také, že $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.*

Dôkaz. Dôkaz implikácie $\Rightarrow$ je zrejmý.

$\Leftarrow$: Nech $(X, \mathcal{T})$ nie je kompaktný priestor. Potom existuje otvorené pokrytie $\mathcal{U}_0$ priestoru $(X, \mathcal{T})$ také, že žiadny konečný podsystém pokrytia $\mathcal{U}_0$ nepokrýva $(X, \mathcal{T})$. Nech $\mathbb{C}$ je systém všetkých otvorených pokrytí priestoru $(X, \mathcal{T})$, ktoré neobsahujú konečné pokrytie $(X, \mathcal{T})$. Zrejme $\mathbb{C}$ je neprázdny a $(\mathbb{C}, \subseteq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Je zrejmé, že ak $\mathcal{U} \in \mathbb{C}$ a $\mathcal{V}$ je otvorené pokrytie $(X, \mathcal{T})$ také, že $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, tak $\mathcal{V} \in \mathbb{C}$. Nech $\mathcal{R}$ je neprázdny reťazec v $(\mathbb{C}, \subseteq)$ a $\mathcal{U}_{\mathcal{R}} = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{R}} \mathcal{U}$. Potom $U_{\mathcal{R}}$ je otvorené pokrytie $(X, \mathcal{T})$. Nech $U_1, ..., U_k \in \mathcal{U}$ $(k \in \mathbb{N})$. Potom existujú $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_k \in \mathcal{R}$ tak, že pre každé i je $U_i \in \mathcal{U}_i$. Pretože $\mathcal{R}$ je reťazec, existuje $m \in \{1, ..., k\}$ tak, že pre všetky i je $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_m$. Teda $\{U_1, ..., U_k\} \subseteq \mathcal{U}_m$ a pretože $\mathcal{U}_m \in \mathbb{C}$ systém $\{U_1, ..., U_k\}$ nepokrýva $(X, \mathcal{T})$. Teda $\mathcal{U}_{\mathcal{R}} \in \mathbb{C}$ a je to horné ohraničenie $\mathcal{R}$ v $(\mathbb{C}, \subseteq)$. Zrejme aj prázdny reťazec v $(\mathbb{C}, \subseteq)$ je zhora ohraničený a podľa Zornovej lemy má $(\mathbb{C}, \subseteq)$ maximálny prvok, ktorý označíme $\mathcal{M}$. Systém $\mathcal{M}$ má nasledujúce vlastnosti:

(1) Ak $U \in \mathcal{M}$, $V \in \mathcal{T}$ a $V \subseteq U$, tak $V \in \mathcal{M}$.

Skutočne, ak $V \notin \mathcal{M}$, tak otvorené pokrytie $\mathcal{M} \cup \{V\}$ nepatrí do $\mathbb{C}$ a existuje konečný systém $\{U_1, ..., U_k\} \subseteq \mathcal{M}$ taký, že $\{U_1, ..., U_k, V\}$ je pokrytie $(X, \mathcal{T})$. Potom ale $\{U_1, ..., U_k, U\}$ je tiež pokrytie $(X, \mathcal{T})$ a $\{U_1, ..., U_k, U\} \subseteq \mathcal{M} \in \mathbb{C}$. Dostali sme spor.

(2) Ak $U_0, V_0 \in \mathcal{T}$ a $U_0 \cap V_0 \in \mathcal{M}$, tak $U_0 \in \mathcal{M}$ alebo $V_0 \in \mathcal{M}$.

Nech $U_0 \notin \mathcal{M}$ aj $V_0 \notin \mathcal{M}$. Potom $\mathcal{M} \cup \{U_0\} \notin \mathbb{C}$, $\mathcal{M} \cup \{V_0\} \notin \mathbb{C}$ a preto existujú $U_1, ..., U_k, V_1, ..., V_m \in \mathcal{M}$ $(k, m \in \mathbb{N})$ tak, že $\{U_0, U_1, ..., U_k\}$ aj $\{V_0, V_1, ..., V_m\}$ sú pokrytia $(X.\mathcal{T})$. Potom $X = (U_0 \cup U_1 \cup ... \cup U_k) \cap (V_0 \cup V_1 \cup ... \cup V_m) = (U_0 \cap V_0) \cup (\bigcup_{(i,j) \in (\{0,1,...,k\} \times \{0,1,...,m\}) \backslash \{(0,0)\}} (U_i \cap V_j) \subseteq (U_0 \cap V_0) \cup (\bigcup_{i=1}^{k} U_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} V_j)$ (v poslednom kroku sme pre $i \neq 0$ využili to, že $U_i \cap V_j \subseteq U_i$ a pre $j \neq 0$ využili to, že $U_i \cap V_j \subseteq V_j$). Teda $\mathcal{W} = \{U_0 \cap V_0, U_1, ..., U_k, V_1, ..., V_m\}$ je pokrytie $(X, \mathcal{T})$, pričom $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$. Dostali sme spor.

Nech teraz $\mathcal{V} = \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$. Potom $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$ a ukážeme, že $\mathcal{V}$ je pokrytie $(X, \mathcal{T})$. Nech $x \in X$. Potom existuje $M \in \mathcal{M}$ tak, že $x \in M$. Pretože $M \in \mathcal{T}$, existujú $S_1, ..., S_n \in \mathcal{S}$ $(n \in \mathbb{N})$ tak, že $x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq M$. Podľa (1) je potom $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \in \mathcal{M}$ a preto podľa (2) existuje i tak, že $S_i \in \mathcal{M}$. Teda $x \in S_i \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$. Pretože $\mathcal{M}$

neobsahuje konečné pokrytie priestoru $(X, \mathcal{T})$ a $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ dostávame, že pokrytie $\mathcal{V}$ neobsahuje konečné pokrytie priestoru $(X, \mathcal{T})$, pričom $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$.

□

Dôsledok 9.1. *Nech X je topologický priestor a $\mathcal{B}$ je báza topológie priestoru X. Potom X je kompaktný práve vtedy, keď každé pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru X také, že $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ obsahuje konečné pokrytie priestoru X.*

Príklad 9.1. *Pomocou predchádzajúcej vety ukážeme, že $[0,1]$ je kompaktný priestor. Zrejme $\mathcal{S} = \{[0,a) : a \in (0,1)\} \cup \{(b,1] : b \in (0,1)\}$ je subbáza topológie priestoru $[0,1]$. Nech $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ a $\mathcal{U}$ je pokrytie $[0,1]$. Nech $\mathcal{U}_0 = \{[0,a) : [0,a) \in \mathcal{U}\}$ a $\mathcal{U}_1 = \{(b,1] : (b,1] \in \mathcal{U}\}$. Potom $\mathcal{U}_0 \neq \emptyset$, $\mathcal{U}_1 \neq \emptyset$ a $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$. Nech $c = inf\{b : (b,1] \in \mathcal{U}_1\}$. Potom pre každé $(b,1] \in \mathcal{U}_1$ platí $c \notin (b,1]$, $c \in [0,1]$ a preto existuje $[0,r) \in U_0$ tak, že $c \in [0,r)$. Pretože $c < r$ existuje $(s,1] \in \mathcal{U}_1$ tak, že $s < r$. Potom $\{[0,r),(s,1]\} \subseteq \mathcal{U}$ a $[0,1] \subseteq [0,r) \cup (s,1]$.*

Práve uvedenú vetu využijeme teraz na dôkaz jednej z najdôležitejších viet topológie.

Veta 9.4. *Nech A je množina a pre každé $\alpha \in A$ je $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ kompaktný priestor. Potom aj priestor $(X, \mathcal{T}) = \prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ je kompaktný.*

Dôkaz. Ak $A = \emptyset$, tak výrok platí. Nech $A \neq \emptyset$. Nech $\mathcal{S}$ je štandardná subbáza súčinovej topológie $\mathcal{T}$ a $\mathcal{U}$ je pokrytie priestoru $(X, \mathcal{T})$ také, že $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$. Pre každé $\alpha \in A$ nech $\mathcal{U}_\alpha = \{V \in \mathcal{T}_\alpha : (p_\alpha)_{-1}[V] \in \mathcal{U}\}$ a $W_\alpha = \bigcup_{V \in \mathcal{U}_\alpha} V$. Zrejme $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{\alpha \in A}(p_\alpha)_{-1}[W_\alpha]$. Ukážeme, že existuje $\alpha \in A$, pre ktoré $W_\alpha = X_\alpha$. Nech pre všetky $\alpha \in A$ platí $W_\alpha \neq X_\alpha$. Vyberme pre každé α $c_\alpha \in X_\alpha \backslash W_\alpha$ a nech $c \in X$ je bod , pre ktorý $p_\alpha(c) = c_\alpha$ pre všetky α. Pretože pre všetky $\alpha \in A$ platí $p_\alpha(c) \notin W_\alpha$, dostávame, že pre všetky $\alpha \in A$ platí $c \notin (p_\alpha)_{-1}[W_\alpha]$ a preto $c \notin \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. Dostali sme spor. Teda existuje $\alpha \in A$ tak, že $W_\alpha = X_\alpha$ a teda $\mathcal{U}_\alpha$ je otvorené pokrytie priestoru $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, ktorý je kompaktný. Preto existujú prvky $V_1, ..., V_k \in \mathcal{U}_\alpha$ $(k \in \mathbb{N})$), pre ktoré $\bigcup_{i=1}^k V_i = X_\alpha$. Potom $X = \bigcup_{i=1}^k (p_\alpha)_{-1}[V_i]$ a teda $\{(p_\alpha)_{-1}[V_1], ..., (p_\alpha)_{-1}[V_k]\}$ je konečné pokrytie priestoru $(X, \mathcal{T})$, ktoré je obsiahnuté v $\mathcal{U}$. □

Príklad 9.2. *1) Pre každú množinu A je priestor $[0,1]^A$ kompaktný T_2-priestor.*

Ďalšie podmienky, ktoré charakterizujú kompaktné priestory používajú pojem centrovaného systému množín.

Definícia 9.2. *Neprázdny systém $\mathbb{C}$ podmnožín priestoru X sa nazýva centrovaný, ak pre každý neprázdny konečný podsystém $\mathbb{C}'$ systému $\mathbb{C}$ platí $\bigcap_{C \in \mathbb{C}'} C \neq \emptyset$.*

Príklad 9.3. *Systém $\mathbb{C} = \{\mathbb{R} \backslash K : K$ je konečná podmnožina $\mathbb{R}\}$ je centrovaný systém v priestore $\mathbb{R}$.*

Veta 9.5. *Nech X je topologický priestor. Potom nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

(a) X je kompaktný priestor.

(b) Každý centrovaný systém $\mathcal{V}$ uzavretých podmnožín priestoru X má neprázdny prienik.

(c) Pre každý centrovaný systém $\mathbb{C}$ podmnožín priestoru X platí $\bigcap_{C\in\mathbb{C}}\overline{C} \neq \emptyset$.

Dôkaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Nech $\mathcal{V}$ je centrovaný systém uzavretých podmnožín priestoru X a $\bigcap_{V\in\mathcal{V}} V = \emptyset$. Potom $\mathcal{U} = \{X\backslash V : V \in \mathcal{V}\}$ je otvorené pokrytie X. Pretože X je kompaktný, existujú $V_1, ..., V_k \in \mathcal{V}$ ($k \in \mathbb{N}$) tak, že $\mathcal{U}' = \{X\backslash V_1, ..., X\backslash V_k\}$ je pokrytie X. Potom $\bigcup_{i=1}^k (X\backslash V_i) = X\backslash \bigcap_{i=1}^k V_i = X$ a preto $\bigcap_{i=1}^k V_i = \emptyset$ čo je spor s tým, že $\mathcal{V}$ je centrovaný systém.

(b) $\Rightarrow$ (c): Ak $\mathbb{C}$ je centrovaný systém podmnožín priestoru X, tak $\{\overline{C} : C \in \mathbb{C}\}$ je centrovaný systém uzavretých podmnožín priestoru X a preto $\bigcap_{C\in\mathbb{C}}\overline{C} \neq \emptyset$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Nech X nie je kompaktný. Potom existuje otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru X také, že pre každý neprázdny konečný podsystém $\{U_1, ..., U_k\}$ systému $\mathcal{U}$ platí $\bigcup_{i=1}^k U_i \neq X$ a teda $\bigcap_{i=1}^k (X\backslash U_i) \neq \emptyset$. Potom systém $\mathbb{C} = \{X\backslash U : U \in \mathcal{U}\}$ je centrovaný systém a $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{(X\backslash U)} = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} (X\backslash U) = X\backslash \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = X\backslash X = \emptyset$. □

Kompaktnosť nie je vo všeobecnosti dedičná vlastnosť. Napríklad podpriestor $(0, 1)$ kompaktného priestoru $[0, 1]$ nie je kompaktný priestor. Platí však nasledujúca veta:

Veta 9.6. *Každý uzavretý podpriestor kompaktného priestoru je kompaktný.*

Dôkaz. Nech X je kompaktný priestor a Y je uzavretý podpriestor priestoru X. Nech $\mathcal{V}$ je centrovaný systém uzavretých podmnožín priestoru Y. Pretože Y je uzavretý podpriestor X, $\mathcal{V}$ je aj centrovaný systém uzavretých podmnožín priestoru X a preto $\bigcap_{V\in\mathcal{V}} V \neq \emptyset$. Teda Y je kompaktný priestor. □

V indiskrétnom priestore alebo v priestore s kofinitnou topológiou je každý podpriestor kompaktný, preto vo všeobecnosti nemusí byť kompaktný podpriestor kompaktného priestoru uzavretý.

Teraz si všimneme podrobnejšie vlastnosti kompaktných T_2-priestorov. K tomu nám bude užitočná nasledujúca veta.

Veta 9.7. *Nech A, B sú kompaktné podmnožiny T_2-priestoru X, $A \cap B = \emptyset$. Potom existujú otvorené podmnožiny U, V priestoru X také, že $A \subseteq U$, $B \subseteq \mathcal{V}$ a $U \cap V = \emptyset$.*

Dôkaz. Nech $c \in A$. Potom pre každé $d \in B$ platí $c \neq d$ a preto existujú otvorené množiny U_d, V_d tak, že $c \in U_d$, $d \in V_d$ a $U_d \cap V_d = \emptyset$. Systém $\{V_d : d \in B\}$ je otvorené pokrytie množiny B a pretože B je kompaktná, existuje konečná podmnožina $\{d_1, ..., d_k\}$ množiny B taká, že $B \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_{d_i}$. Nech $U_c = \bigcap_{i=1}^k U_{d_i}$ a $V_c = \bigcup_{i=1}^k V_{d_i}$. Potom U_c, V_c sú otvorené, $c \in U_c$, $B \subseteq V_c$ a $U_c \cap V_c = \emptyset$. Pretože c bol ľubovoľný prvok A, pre každé $c \in A$ existujú otvorené podmnožiny U_c, V_c také, že $c \in U_c$, $B \subseteq V_c$ a $U_c \cap V_c = \emptyset$. Systém $\{U_c : c \in A\}$ je otvorené pokrytie

A a pretože A je kompaktná, existuje konečná podmnožina $\{c_1, ..., c_m\}$ množiny A tak, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{c_i}$. Nech $U = \bigcup_{i=1}^m U_{c_i}$ a $V = \bigcap_{i=1}^m V_{c_i}$. Potom U, V sú otvorené podmnožiny priestoru X, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. □

Z tejto vety dostávame nasledujúcu vetu, ktorá hovorí o vlastnostiach kompaktných T_2-priestorov.

Veta 9.8. *1) Každá kompaktná podmnožina (kompaktný podpriestor) T_2-priestoru je uzavretá (uzavretý).*

2) Podmnožina kompaktného T_2-priestoru je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá.

3)Každý kompaktný T_2-priestor je normálny (a teda T_4).

4) Každý podpriestor kompaktného T_2 priestoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.

Dôkaz. 1) Nech K je kompaktná podmnožina T_2-priestoru X a $c \notin K$. Potom $\{c\}$ je tiež kompaktná podmnožina X a $K \cap \{c\} = \emptyset$. Podľa predchádzajúcej vety existujú otvorené podmnožiny U, V v X tak, že $K \subseteq U$, $\{c\} \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. Zrejme V je okolie c v X a $V \cap K = \emptyset$. Teda K je uzavretá podmnožina priestoru X.

2) Vyplýva z 1) a vety 9.6.

3) Nech X je kompaktný T_2-priestor a A, B sú uzavreté podmnožiny v X. Potom A, B sú kompaktné (podľa 2)) a podľa predchádzajúcej vety existujú otvorené podmnožiny U, V v X tak, že $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.

4) Ak X je kompaktný T_2-priestor, tak je to T_4-priestor a teda aj $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor a každý podpriestor $T_{3\frac{1}{2}}$-priestoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor (veta 5.3). □

Príklad 9.4. *Nech $(X, \mathcal{T}_X)$ je ľuboboľný topologický priestor, $a \notin X$, $Y = X \cup \{a\}$ a $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_X \cup \{Y\}$. Potom $(Y, \mathcal{T}_Y)$ je kompaktný priestor a $(X, \mathcal{T}_X)$ je otvorený podpriestor priestoru $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Teda každý topologický priestor je otvoreným podpriestorom kompaktného priestoru.*

Z vety o reprezenácii $T_{3\frac{1}{2}}$-priestorov (veta 6.10) a predchádzajúcich viet dostávame vetu o reprezentácii kompaktných T_2-priestorov a tiež možnosť ukázať, že podpriestor normálneho priestoru nemusí byť normálny priestor.

Príklad 9.5. *V príklade 6.1 sme ukázali, že priestor $S \times S$, kde S je Sorgenfreyova priamka nie je normálny a je to $T_3\frac{1}{2}$-priestor. Potom (veta 6.10) existuje množina A tak, $S \times S$ je homeomorfný s podpriestorom Y priestoru $[0,1]^A$. Priestor $[0,1]^A$ je kompaktný T_2-priestor a preto je normálny. Jeho podpriestor Y je homeomorfný s $S \times S$ a preto nie je normálny.*

Veta 9.9. *Priestor X je kompaktný T_2-priestor práve vtedy, keď existuje množina A tak, že X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom priestoru $[0,1]^A$.*

Dôkaz. Nech X je kompaktný T_2-priestor. Potom, podľa predchádzajúcej vety X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor a podľa vety 6.10 existuje množina A tak, že X je homeomorfný s niektorým podpriestorom Y priestoru $[0,1]^A$. Pretože Y je kompaktný a priestor $[0,1]^A$ je T_2-priestor, Y je uzavretý podpriestor priestoru $[0,1]^A$.

Obrátene, nech X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom Y priestoru $[0,1]^A$. Priestor $[0,1]^A$ je kompaktný T_2-priestor a preto Y a teda aj X je kompaktný T_2-priestor. $\square$

Veta 9.10. *1) Ak (X,d) je metrický priestor a K je kompaktná podmnožina v $(X,\mathcal{T}_d)$ tak A je uzavretá v $(X,\mathcal{T}_d)$ a ohraničená v (X,d).*

2) Ak $\mathbb{R}^n$ je metrický priestor s euklidovskou metrikou a A je uzavretá a ohraničená podmnožina v $\mathbb{R}^n$, tak A je kompaktná.

Dôkaz. 1) Priestor $(X,\mathcal{T}_d)$ je T_2-priestor a preto A je uzavretá. Nech $c \in A$. Systém $\{O_n^d(c) : n \in \mathbb{N}\}$ je otvorené pokrytie $(X,\mathcal{T}_d)$ a teda aj A, preto existuje konečný systém $\{O_{n_1}^d(c), ..., O_{n_k}^d(c)\}$, ktorý pokrýva A. Ak m je najväčší prvok množiny $\{n_1, ..., n_k\}$, tak $A \subseteq O_m^d(c)$ a teda je ohraničená.

2) Nech A je uzavretá a ohraničená v $\mathbb{R}^n$ a nech pre každé $i \in \{1, ..., n\}$ je $p_i\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ projekcia na i-tu zložku. Potom $p_i[A]$ je ohraničená v $\mathbb{R}$ a teda existujú $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ tak, že $p_i[A] \subseteq [c_i, d_i]$. Potom ale $A \subseteq \prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ priestor $\prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ je kompaktný podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$, A je uzavretá podmnožina v $\prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ a preto je kompaktná v $\prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ a aj v $\mathbb{R}^n$ (podpriestor priestoru $\prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ určený množinou A je totožný s podpriestorom priestoru $\mathbb{R}^n$ určeným množinou A). $\square$

V metrickom priestore $((0,1), d)$, kde d je euklidovská metrika na množine $(0,1)$ je množina $(0,1)$ uzavretá aj ohraničená a nie je kompaktná.

Kompaktnosť definičného oboru spojitého zobrazenia významne ovplyvňuje jeho vlastnosti. Hovorí o tom nasledujúca veta.

Veta 9.11. *1) Ak $f : X \longrightarrow Y$ je spojité zobrazenie a K je kompaktná podmnožina priestoru X, tak $f[K]$ je kompaktná podmnožina priestoru Y (teda ak X je kompaktný a f je surjektívne, tak aj Y je kompaktný priestor).*

2) Ak $f : X \longrightarrow Y$ je spojité zobrazenie, X je kompaktný priestor a Y je T_2-priestor, tak f je uzavreté zobrazenie. Ak f je aj surjektívne, tak f je faktorové zobrazenie.

3) Ak $f : X \longrightarrow Y$ je bijektívne spojité zobrazenie, X je kompaktný a Y je T_2-priestor, tak f je homeomorfizmus.

4) Ak X je neprázdny kompaktný priestor a $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie, tak existujú $a, b \in X$ tak, že pre každé $x \in X$ platí $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Dôkaz. 1) Nech $\mathcal{V}$ je otvorené pokrytie množiny $f[A]$ v Y. Potom $\mathcal{U} = \{f_{-1}[V] : V \in \mathcal{V}\}$ je otvorené pokrytie množiny A v X. Pretože A je kompaktná, existuje $k \in \mathbb{N}$ a $V_1, ..., V_k \in \mathcal{V}$ tak, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k p_{-1}[V_i]$ a preto $f[A] \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_i$. Teda $f[A]$ je kompaktná podmnožina priestoru Y.

2) Nech A je uzavretá podmnožina priestoru X. Potom A je kompaktná v X a preto $f[A]$ je kompaktná v Y. Pretože Y je T_2-priestor, $f[A]$ je uzavretá v Y.

3) Vyplýva z 2) lebo uzavreté bijektívne spojité zobrazenie je homeomorfizmus.

4) Množina $f[X]$ je neprázdna a kompaktná v $\mathbb{R}$, preto je uzavretá a ohraničená a existuje $c = inf(f[X])$ a $d = sup(f[X])$. Pretože $f[X]$ je uzavretá,

$c, d \in f[X]$ a teda existujú $a, b \in X$ tak, že $f(a) = c$ a $f(b) = d$. Potom pre každé $x \in X$ platí $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. $\square$

Z vlastnosti 3) predchádzajúcej vety vyplýva, že ak $f : X \longrightarrow Y$ je spojité a bijektívne zobrazenie a X, Y sú kompaktné T_2-priestory, tak f je homeomorfizmus. Ak $(X, \mathcal{T})$ je kompaktný T_2 priestor $\mathcal{T}'$ je T_2-topológia na X taká, že $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, tak $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Ak $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ a $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}$, tak $(X, \mathcal{T}')$ nie je kompaktný priestor.

Existuje veľa rôznych zovšeobecnení pojmu kompaktný priestor (napríklad lokálne kompaktný priestor, kompaktne generovaný priestor, pseudokompaktný priestor, spočítateľne kompaktný priestor a mnoho iných). Z nich najznámejší a asi aj najdôležitejší je pojem lokálne kompaktného priestoru.

Definícia 9.3. *Topologický priestor X sa nazýva lokálne kompaktný, ak pre každý bod $a \in X$ existuje kompaktné okolie.*

Príklady 9.2. *1) Každý kompaktný priestor je lokálne kompaktný.*

2) Priestor $\mathbb{R}$ s prirodzenou topológiou je lokálne kompaktný priestor, lebo pre každé $a \in \mathbb{R}$ je interval $[a-1, a+1]$ kompaktným okolím bodu a. Pritom to nie je kompaktný priestor.

3) Priestor $\mathbb{Q}$ s prirodzenou topológiou (je to podpriestor priestoru $\mathbb{R}$) nie je lokálne kompaktný.

Predpokladajme, že je lokálne kompaktný a W je kompaktné okolie bodu 0. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(-\varepsilon, \varepsilon)_{\mathbb{Q}} = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subseteq W$. Zvoľme $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $0 < s < \varepsilon$. Potom $[-s, s]_{\mathbb{Q}} = [-s, s] \cap \mathbb{Q} = (-s, s) \cap \mathbb{Q}$ je uzavretá v $\mathbb{Q}$, $[-s, s]_{\mathbb{Q}} \subseteq W$ a preto je to kompaktná podmnožina v $\mathbb{Q}$. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je r_n racionálne číslo, pre ktoré $0 < r_n$ a $s - \frac{1}{n} < r_n < s$ a nech $(-s, r_n)_{\mathbb{Q}} = (-s, r_n) \cap \mathbb{Q}$. Potom $\{(-s, r_n)_{\mathbb{Q}} : n \in \mathbb{N}\}$ je otvorené pokrytie množiny $[-s, s]_{\mathbb{Q}}$ v priestore $\mathbb{Q}$, ktoré neobsahuje konečné pokrytie množiny $[-s, s]_{\mathbb{Q}}$. Dostali sme spor.

Veta 9.12. *1) Ak X je lokálne kompaktný T_2-priestor, tak pre každé $a \in X$ tvorí množina všetkých kompaktných okolí bodu a bázu okolí bodu a.*

2) Ak X je lokálne kompaktný regulárny priestor, tak pre každé $a \in X$ tvorí množina všetkých kompaktných okolí bodu a bázu okolí bodu a.

Dôkaz. 1) Nech $a \in X$, W je kompaktné okolie bodu a a U je ľuboboľné okolie bodu a. Potom $U' = U \cap W$ je okolie a v priestore X aj v podpriestore W priestoru X. Priestor W je kompaktný T_2-priestor a preto je to T_4-priestor a teda aj regulárny. Podľa vety 5.5.1) (ako bázu okolí teraz berieme systém všetkých okolí) existuje okolie V bodu a v priestore W také, že $V' = \overline{V}^W \subseteq U'$, pričom $\overline{V}^W$ je uzáver V v priestore W. Množina V' je uzavretá v W a preto kompaktná. Podpriestor priestoru W určený množinou V' je totožný s podpriestorom priestoru X určeným množinou V' a preto je V' kompaktnou podmnožinou v X. Zrejme $V' \subseteq U' \subseteq U$. Ukážeme, že V' je okolie a v X. Pretože U' je okolie a v X, $a \in int_X(U')$. $V_1 = V' \cap int_X(U')$ je okolie a v podpriestore $int_X(U')$, preto existuje otvorená podmnožina S priestoru $int_X(U')$ tak, že

$a \in S \subseteq V_1$. Ale $int_X(U')$ je otvorený podpriestor priestoru X a preto S je otvorená aj v X a platí $a \in S \subseteq V_1 \subseteq V'$. Teda V' je okolie a v X, ktoré je kompaktné a $V' \subseteq U$.

2) Podobne ako 1), stačí si uvedomiť, že podpriestor W regulárneho priestoru je regulárny.

□

Ukázali sme, že podpriestor $\mathbb{Q}$ priestoru $\mathbb{R}$ nie je lokálne kompaktný priestor, $\mathbb{R}$ je lokálne kompaktný priestor a teda vlastnosť priestoru byť lokálne kompaktný nie je dedičná. Platí však nasledujúce tvrdenie.

Veta 9.13. *1) Každý uzavretý podpriestor lokálne kompaktného priestoru je lokálne kompaktný.*

2) Každý otvorený podpriestor lokálne kompaktného T_2-priestoru je lokálne kompaktný.

Dôkaz. 1) Nech Y je uzavretý podpriestor X, $c \in Y$. Nech W je kompaktné okolie c v X. Potom $V = W \cap Y$ je okolie c v Y a V je uzavretá podmnožina v podpriestore W. Preto V je kompaktná vo W aj v Y.

2) Nech U je otvorený podpriestor priestoru X $c \in U$. Potom U je okolie c v X a pretože X je lokálne kompaktný T_2-priestor existuje kompaktné okolie V bodu c v X také, že $V \subseteq U$. Potom V je kompaktné okolie c v U. □

Veta 9.14. *(Alexandrovova jednobodová kompaktifikácia lokálne kompaktného T_2-priestoru) Nech $(X, \mathcal{T}_X)$ je lokálne kompaktný T_2-priestor, $c \notin X$. Nech $Y = X \cup \{c\}$ a $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_X \cup \{U \in \mathcal{P}(Y) : c \in U$ a $X \setminus U$ je kompaktná v $(X, \mathcal{T}_X)\}$. Potom $(Y, \mathcal{T}_Y)$ je kompaktný T_2-priestor, $(X, \mathcal{T}_X)$ je otvorený podpriestor priestoru $(Y, \mathcal{T}_Y)$ a ak $(X, \mathcal{T}_X)$ nie je kompaktný, tak $\overline{X} = Y$ v $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

Dôkaz. Nech $V \in \mathcal{T}_Y$, $c \in V$. Potom $V \cap X \in \mathcal{T}_X$, pretože $X \setminus V = X \setminus (X \cap V)$ je kompaktná a preto uzavretá v $(X, \mathcal{T}_X)$.

Nech $U, V \in \mathcal{T}_Y$. Ak $U \in \mathcal{T}_X$, tak $U \cap V = U \cap (V \cap X) \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$. Podobne, ak $V \in \mathcal{T}_X$. Nech $U, V \in \mathcal{T}_Y \setminus \mathcal{T}_X$. Potom $c \in U \cap V$ a $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ je kompaktná v $(X, \mathcal{T}_X)$. Teda $U \cap V \in \mathcal{T}_Y$.

Nech $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_Y$. Ak $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_X$, tak $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$. Nech existuje $V \in \mathcal{S}$ tak, že $c \in V$. Potom $X \setminus V$ je kompaktná podmnožina v $(X, \mathcal{T}_X)$. Pre každé $U \in \mathcal{S}$ je $U \cap X \in \mathcal{T}_X$ a preto $X \setminus U$ je uzavretá v $(X, \mathcal{T}_X)$. Potom $X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = \bigcap_{U \in \mathcal{S}} (X \setminus U)$ je uzavretá podmnožina v $(X, \mathcal{T}_X)$ aj v jeho podpriestore $X \setminus V$ a preto je kompaktná v $(X, \mathcal{T}_X)$, pričom $c \in \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$. Teda $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}_Y$. Zrejme $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$ a teda $\mathcal{T}_Y$ je topológia na Y.

Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ je $V \cap X \in \mathcal{T}_X$ a pre každé $U \in \mathcal{T}_X$ existuje $U \in \mathcal{T}_Y$ tak, že $U = U \cap X$. Teda $(X, \mathcal{T}_X)$ je podpriestor priestoru $(Y, \mathcal{T}_Y)$ a pretože $X \in \mathcal{T}_Y$ je to otvorený podpriestor priestoru $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Nech $a, b \in Y$ a $a \neq b$. Ak $a, b \in X$, tak existujú $U, V \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$ také, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$. Nech $a \in X$ a $b = c$. Potom existuje kompaktné okolie W bodu a v $(X, \mathcal{T}_X)$, ktoré je aj okolím a v $(Y, \mathcal{T}_Y)$ (existuje $U \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$ tak, že $a \in U \subseteq W$). Množina $V = Y \setminus W \in \mathcal{T}_Y$ ($c \in V$ a $Y \setminus V = W$) je okolím c v $(Y, \mathcal{T}_Y)$, pričom $W \cap V = \emptyset$. Teda $(T, \mathcal{T}_Y)$ je T_2-priestor.

Nech $\mathbb{C}$ je centrovaný systém uzavretých podmnožín v priestore $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Ak pre všetky $F \in \mathbb{C}$ platí $c \in F$, tak $\bigcap_{F\in\mathbb{C}} F \neq \emptyset$. Nech existuje $D \in \mathbb{C}$ tak, že $c \in Y \backslash D$. Potom $Y \backslash D \in \mathcal{T}_Y$ a pretože $c \in Y \backslash D$, platí $X \backslash (Y \backslash D) = D$ je kompaktna podmnožina $(X, \mathcal{T}_X)$. Pretože $(X, \mathcal{T}_X)$ je podpriestor priestoru $(Y, \mathcal{T}_Y)$ D je kompaktná podmnožina aj v $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Systém $\mathbb{C}' = \{F \cap D : F \in \mathbb{C}\}$ je centrovaný systém uzavretých podmnožín v kompaktnom podpriestore D priestoru $(Y, \mathcal{T}_Y)$ a preto $\bigcap_{F\in\mathbb{C}}(F \cap D) = \bigcap_{F\in\mathbb{C}} F \neq \emptyset$. Teda $(Y, \mathcal{T}_Y)$ je kompaktný priestor.

Nakoniec, nech $(X, \mathcal{T}_X)$ nie je kompaktný. Potom pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ také, že $c \in V$ platí $X \backslash V \neq X$ a preto $V \cap X \neq \emptyset$. Teda $c \in \overline{X}$ a $\overline{X} = Y$.

□

Pretože každý lokálne kompaktný T_2-priestor je podpriestorom kompaktného T_2-priestoru, dostávame:

Dôsledok 9.2. *Každý lokálne kompaktný T_2-priestor je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.*

Príklady 9.3. *1) Nech Nech X je diskrétny priestor, $c \notin X$ a $X^\star$ je topologický priestor, definovaný na množine $X \cup \{c\}$, ktorého topológia je $\mathcal{T}_{X^\star} = \mathcal{P}(X) \cup \{V \in \mathcal{P}(X \cup \{c\}) : c \in V$ a $X \backslash V$ je konečná $\}$. Potom $X^\star$ je jednobodová kompaktifikácia X.*

2) Jednobodová kompaktifikácia priestoru $\mathbb{R}$ (s prirodzenou topológiou) je homeomorfná s priestorom S^1, jednobodová kompaktifikácia priestoru $\mathbb{R}^n$ je priestor S^n, kde S^n je podpriestor priestoru $\mathbb{R}^{n+1}$ určený množinou $\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$.

3) Ak X je kompaktný T_2-priestor, $a \in X$, tak podpriestor priestoru X určený množinou $X \backslash \{a\}$ je lokálne kompaktný. Teda aby pre nejaký priestor existovala jednobodová kompaktifikácia, ktorá je T_2-priestorom je nevyhnutné, aby daný priestor bol lokálne kompaktný T_2-priestor.

V nasledujúcom príklade ukážeme, že lokálne kompaktný priestor nemusí byť normálny.

Príklad 9.6. *Nech $\mathbb{R}_d^\star$ je jednobodová kompaktifikácia diskrétneho priestoru $\mathbb{R}_d$ na množine $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_d^\star = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \mathcal{T})$, kde $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) : \infty \in V$ a $\mathbb{R} \backslash V$ je konečná $\}$a $\mathbb{N}^\star$ je jednobodová kompaktifikácia diskrétneho priestoru na $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^\star = (\mathbb{N} \cup \{\omega\}, \mathcal{T}')$, kde $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{\omega\}) : \omega \in V$ a $\mathbb{N} \backslash V$ je konečná$\}$). Priestor $\mathbb{R}_d^\star \times \mathbb{N}^\star$ je kompaktný T_2-priestor a teda je to aj lokálne kompaktný T_2-priestor. Nech X je podpriestor priestoru $R_d^\star \times \mathbb{N}^\star$ určený množinou $(R_d^\star \times \mathbb{N}^\star) \backslash \{(\infty, \omega)\}$. X je otvorený podpriestor priestoru $R_d^\star \times \mathbb{N}^\star$ a preto je to lokálne kompaktný T_2-priestor. Ukážeme, že nie je normálny.*

Množiny $A = (\mathbb{R}_d^\star \times \{\omega\}) \cap X$, $B = (\{\infty\} \times \mathbb{N}^\star) \cap X$ sú uzavreté podmnožiny priestoru X a $A \cap B = \emptyset$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ je podpriestor $\mathbb{R}_d^\star \times \{n\}$ priestoru $R_d^\star \times \mathbb{N}^\star$ a teda aj priestoru X homeomorfný s priestorom $\mathbb{R}_d^\star$. Nech $V_n = V \cap (\mathbb{R}_d^\star \times \{n\})$. Potom $V_n = V_n' \times \{n\}$, kde V_n' je otvorená podmnožina v $\mathbb{R}_d^\star$. Zrejme $\infty \in V_n'$ a preto $\mathbb{R} \backslash V_n' = \mathbb{R}_d^\star \backslash V_n' = A_n$ je konečná. Potom $V' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n' = \mathbb{R}_d^\star \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ je nespočítateľná a teda existuje $r \in \mathbb{R}$ také, že $r \in V'$. Pre každé

$(s,n) \in V' \times \mathbb{N}$ je $(s,n) \in V' \times \{n\} = V_n \subseteq V$, teda $V' \times \mathbb{N} \subseteq V$. Nech $r \in V' \cap \mathbb{R}$. Podpriestor $\{r\} \times \mathbb{N}^\star$ priestoru X (je to aj podpriestor priestoru $R_d^\star \times \mathbb{N}^\star$) je homeomorfný s priestorom $\mathbb{N}^\star$. Nech $U_r = U \cap (\{r\} \times \mathbb{N}^\star)$. Potom $U_r = \{r\} \times U_r'$, kde U_r' je otvorená podmnožina v $\mathbb{N}^\star$ a $\omega \in U_r'$. Potom $\mathbb{N} \backslash U_r'$ je konečná a preto existuje $m \in U_r' \cap \mathbb{N}$. Potom $(r,m) \in (\{r\} \times U_r' = U_r \subseteq U$. Súčasne $(r,m) \in V' \times \mathbb{N} \subseteq V$ a preto $(r,m) \in U \cap V$. Teda pre ľubovoľné otvorené podmnožiny U, V priestoru X také, že $A \subseteq U$ a $B \subseteq V$ platí $U \cap V = \emptyset$ a preto X nie je normálny.

Priestor $R_d^\star \times \mathbb{N}^\star$ je aj T_4-priestor a X je príklad otvoreného podpriestoru T_4-priestoru ktorý nie je normálny.

V lokálne kompaktných T_2-priestoroch je možné charakterizovať tie podpriestory, ktoré sú lokálne kompaktné. Základom je nasledujúca veta (spolu s vetou 9.13).

Veta 9.15. *Ak M je lokálne kompaktný podpriestor T_2-priestoru X a $\overline{M} = X$, tak M je otvorený podpriestor priestoru X.*

Dôkaz. Nech $c \in M$. Pretože M je lokálne kompaktný, existuje kompaktné okolie K bodu c v priestore M. Potom existuje otvorená podmnožina V priestoru M tak, že $c \in V \subseteq K$. M je podpriestor X a preto existuje otvorená podmnožina U priestoru X, pre ktorú $M \cap U = V$. Ukážeme, že $U \subseteq M$. Ak W je neprázdna otvorená podmnožina podpriestoru U tak W je otvorená aj v X a pretože M je hustá v X, platí $W \cap M = W \cap (M \cap W) \neq \emptyset$. Teda $M \cap U$ je hustá v podpriestore U a preto $U = \overline{M \cap U}^U = \overline{M \cap U} \cap U$ a teda $U \subseteq \overline{M \cap U}$ ($\overline{M \cap U}^U$ je uzáver $M \cap U$ v priestore U, $\overline{M \cap U}$ je uzáver $M \cap U$ v priestore X). Podpriestor K je kompaktný a teda uzavretý v X. Preto $\overline{V}^K = \overline{V} = \overline{M \cap U}$ a teda $U \subseteq \overline{V}^K \subseteq K \subseteq M$. Dokázali sme, že existuje okolie U bodu c v X, pre ktoré $U \subseteq M$ a teda M je otvorený podpriestor priestoru X. □

Z tejto vety napríklad vyplýva, že podpriestor $\mathbb{Q}$ priestoru $\mathbb{R}$ (podpriestor $\mathbb{Q}^n$ priestoru $\mathbb{R}^n$) s prirodzenou topológiou nie je lokálne kompaktný priestor.

Veta 9.16. *Podpriestor Y lokálne kompaktného T_2-priestoru X je lokálne kompaktný práve vtedy, keď existuje uzavretá podmnožina F a otvorená podmnožina U priestoru X tak, že $Y = F \cap U$.*

Dôkaz. Nech Y je lokálne kompaktný podpriestor priestoru X a $F = \overline{Y}$. Potom F je uzavretá podmnožina priestoru X, podpriestor určený množinou F je T_2-priestor, Y je hustý lokálne kompaktný podpriestor priestoru F a preto je otvoreným podpriestorom F, t. j. Y je otvorená podmnožina v F. Preto existuje otvorená podmnožina U priestoru X tak, že $F \cap U = Y$.

Obrátene, nech $Y = F \cap U$, kde F je uzavretá a U je otvorená podmnožina X. Potom podpriestor určený množinou F je uzavretý podpriestor v X a preto je to lokálne kompaktný T_2-priestor. Podpriestor Y je otvorený podpriestor priestoru F a preto je lokálne kompaktný. □

Ľahko sa overí, že súčin dvoch a teda aj konečného počtu lokálne kompaktných priestorov je lokálne kompaktný priestor. Súčin ľubovoľného systému lokálne kompaktných priestorov je lokálne kompaktný práve vtedy, keď všetky priestory okrem konečného počtu sú kompaktné.

Faktorový priestor lokálne kompaktného priestoru nemusí byť lokálne kompaktný. Uvažujme o faktorovom priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_{\sim}$ z príkladov 7.1.2) (strana 32) ($x \sim y$ práve vtedy, keď $x = y$ alebo $x, y \in \mathbb{N}$). Prirodzená projekcia $p: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \longrightarrow (\mathbb{R}.\mathcal{T}_{nat})|_{\sim}$ je faktorové zobrazenie, ktoré je naviac uzavreté. Ukážeme, že priestor $(\mathbb{R}.\mathcal{T}_{nat})|_{\sim}$ nie je lokálne kompaktný. Predpokladajme, že je. Potom existuje kompaktné okolie K bodu $\mathbb{N}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_{\sim}$ a existuje prvok $V = p[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n)]$, kde pre všetky n je $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$, z bázy okolí $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ (pozri citovaný príklad), pre ktorý $V \subseteq K$. Potom $V' = p[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n - \frac{\varepsilon}{2}, n + \frac{\varepsilon}{2}]]$ je uzavreté okolie bodu $\mathbb{N}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_{\sim}$, $V' \subseteq V \subseteq K$ a preto je to kompaktná podmnožina v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_{\sim}$ (V' je uzavretá podmnožina kompaktnej množiny K). Ale pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $U_n = p[(\bigcup_{k=1}^{n}(k-\varepsilon_k, k+\varepsilon_k)) \cup (\bigcup_{k=n+1}^{\infty}(k - \frac{\varepsilon_k}{2}, k + \frac{\varepsilon_k}{2}))]$ otvorená množina v $\mathbb{R}|_{\sim}$ (je to prvok $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$) a systém $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ je otvorené pokrytie množiny V', ktoré neobsahuje konečné pokrytie V'. Dostali sme spor. Teda $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})|_{\sim}$ nie je lokálne kompaktný.

Na druhej strane je zrejmé, že ak $f: X \longrightarrow Y$ je spojité otvorené surjektívne zobrazenie a X je lokálne kompaktný, tak aj Y je lokálne kompaktný, lebo obraz kompaktného okolia bodu priestore X pri takomto zobrazení je kompaktné okolie jeho obrazu v priestore Y.

10 Konvergencia

Najprv uvedieme definíciu a niektoré vlastnosti filtrov na množine.

Definícia 10.1. *Nech X je množina, $\mathcal{P}(X)$ je potenčná množina množiny X.*

a) Neprázdny systém $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva báza filtra na X, ak platí:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{H}$.

(2) Ak $A, B \in \mathcal{H}$, tak existuje $C \in \mathcal{H}$ také, že $C \subseteq A \cap B$.

b) Neprázdny systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ sa nazýva filter na X, ak platí:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(2) Ak $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, tak $F_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \mathcal{F}$.

(3) Ak $F \in \mathcal{F}$ a $F \subseteq V \subseteq X$, tak $V \in \mathcal{F}$.

c) Filter $\mathcal{U}$ na X sa nazýva ultrafilter na X, ak pre každý filter $\mathcal{G}$ na X taký, že $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ platí $\mathcal{U} = \mathcal{G}$ (t. j. je to maximálny filter na X vzhľadom na $\subseteq$).

d) Ultrafilter $\mathcal{U}$ na X sa nazýva hlavný, ak $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U \neq \emptyset$.

Príklady 10.1. *1) Ak $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $c \in X$ a $\mathcal{B}(c)$ je báza okolí bodu c v $(X, \mathcal{T})$, tak $\mathcal{B}(c)$ je báza filtra na X. Systém $\mathcal{N}(c)$ všetkých okolí bodu c je filter na X.*

2) Systém $\mathcal{H} = \{\mathbb{R}\backslash K : K$ je neprázdna konečná podmnožina $\mathbb{R}$ $\}$ je báza filtra na $\mathbb{R}$, nie je to filter na $\mathbb{R}$.

3) Systém $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}\backslash L : L$ je konečná podmnožina $\mathbb{R}$ $\}$ je filter na $\mathbb{R}$, nie je to ultrafilter na $\mathbb{R}$.

4) Systém $\mathcal{G} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{N} \subseteq F\}$ je filter na $\mathbb{R}$, nie je to ultrafilter.

5) Systém $\mathcal{U} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : 0 \in F\}$ je ultrafilter na $\mathbb{R}$.

6) Každý ultrafilter je filter, každý filter je báza filtra, každá báza filtra je centrovaný systém.

7) Ultrafilter $\mathcal{U}$ na X je hlavný práve vtedy, keď existuje $c \in X$ také, že $\{c\} \in \mathcal{U}$ (t. j. $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(X) : c \in U\}$.

Veta 10.1. *1) Ak $\mathbb{C}$ je centrovaný systém na množine X, tak $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \{H \in \mathcal{P}(X) : \exists_{k\in\mathbb{N}} \exists_{C_1,\ldots,C_k\in\mathbb{C}}\ H = \bigcap_{i=1}^{k} C_i\}$ je báza filtra na X a $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.*

2) Ak $\mathcal{H}$ je báza filtra na množine X, tak $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \{F \in \mathcal{P}(X) : \exists_{H\in\mathcal{H}}\ H \subseteq F\}$ je filter na X a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ a pre každý filter $\mathcal{G}$ na X, pre ktorý $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ platí $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{G}$. Hovoríme, že filter $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ je generovaný bázou filtra $\mathcal{H}$.

3) Nech $\mathcal{F}$ je filter na množine X, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ a pre každé $F \in \mathcal{F}$ existuje $H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq F$. Potom $\mathcal{H}$ je báza filtra na X a $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

Dôkaz. 1) Zrejme $\emptyset \notin \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ a pre každé $U, V \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ platí $U \cap V \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

2) Zrejme $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Ak $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$, tak existujú $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, pre ktoré $H_1 \subseteq F_1$ a $H_2 \subseteq F_2$. Potom existuje $H_3 \in \mathcal{H}$ tak, že $H_3 \subseteq H_1 \cap H_2 \subseteq F_1 \cap F_2$. Teda $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Nech $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ a $F \subseteq V \subseteq X$. Potom existuje $H \in \mathcal{H}$, pre ktoré $H \subseteq F \subseteq V$ a preto $V \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Teda $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ je filter na X. Nech $\mathcal{G}$ je filter na X, pre ktorý $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ a nech $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Potom existuje $H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq F$.Pretože $H \in \mathcal{G}$, dostávame, že $F \in \mathcal{G}$ a teda $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{G}$.

3) Zrejme $\emptyset \notin \mathcal{H}$. Nech $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$. Potom $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{F}$ a preto existuje $H_3 \in \mathcal{H}$ tak, že $H_3 \in \mathcal{H}$. Teda $\mathcal{H}$ je báza filtra na X. Podľa 2) je $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{F}$. Nech $F \in \mathcal{F}$. Potom existuje $H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq F$ a preto $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. Teda $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$. □

Veta 10.2. *1) Ak X je množina, $A \subseteq X$ a $\mathcal{H}$ je báza filtra (filter) na množine A, tak $\mathcal{H}$ je báza filtra na X.*

2) Ak $\mathcal{H}$ je báza filtra (filter) na množine X a $f : X \longrightarrow Y$ je zobrazenie, tak $f[\mathcal{H}] = \{f[H] : H \in \mathcal{H}\}$ je báza filtra na Y.

Dôkaz. Cvičenie. □

Veta 10.3. *1) Nech $\mathbb{C}$ je centrovaný systém na množine X. Potom existuje centrovaný systém $\mathcal{U}$ na X taký, že $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{U}$ a pre každý centrovaný systém $\mathcal{V}$ na X, pre ktorý $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, platí $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, t. j. $\mathcal{U}$ je maximálny centrovaný systém na X vzhľadom na $\subseteq$.*

2) Každý maximálny centrovaný systém na množine X (vzhľadom na $\subseteq$) je ultrafilter na X.

Dôkaz. 1) Nech $\mathcal{S}$ je systém všetkých centrovaných systémov $\mathcal{D}$ na X, pre ktoré $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{D}$. Zrejme $\mathcal{S} \neq \emptyset$ a $(\mathcal{S}, \subseteq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Ukážeme, že $(\mathcal{S}, \subseteq)$ má maximálny prvok. Nech $\mathcal{R}$ je neprázdny reťazec v $(\mathcal{S}, \subseteq)$ a $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{D}\in\mathcal{R}} \mathcal{D}$. Ukážeme, že $\mathcal{M} \in \mathcal{S}$. Nech $M_1, ..., M_k \in \mathcal{M}$ ($k \in \mathbb{N}$), Potom existujú $\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_k \in \mathcal{R}$ také, že pre každé i je $M_i \in \mathcal{D}_i$. Pretože $\mathcal{R}$ je reťazec, existuje $m \in \{1, ..., k\}$ tak, že pre všetky i platí $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}_m$. Potom $M_1, ..., M_k \in \mathcal{D}_m$ a preto $\bigcap_{i=1}^{k} M_i \neq \emptyset$. Teda $\mathcal{M} \in \mathcal{S}$ (zrejme $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{M}$) a $\mathcal{M}$ je horné ohraničenie

$\mathcal{R}$ v $(\mathcal{S}, \subseteq)$. Podľa Zornovej lemy potom existuje maximálny prvok $\mathcal{U}$ v $(\mathcal{S}, \subseteq)$. Zrejme $\mathcal{U}$ je centrovaný systém na X a $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{U}$. Nech $\mathcal{V}$ je centrovaný systém na X, pre ktorý $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Potom $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{V}$ a preto $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$. Pretože $\mathcal{U}$ je maximálny prvok v $(\mathcal{S}, \subseteq)$ dostávame, že $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

2) Zrejme $\mathcal{U} \neq \emptyset$ a $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Nech $A, B \in \mathcal{U}$. Potom $A \cap B \neq \emptyset$ a systém $\mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ je centrovaný systém na X. Pretože $\mathcal{U}$ je maximálny a $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$, platí $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ a teda $A \cap B \in \mathcal{U}$. Nech $A \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{P}(X)$ a $A \subseteq V$. Potom, zrejme, $\mathcal{U} \cup \{V\}$ je centrovaný systém na X, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cup \{V\}$ a preto $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{V\}$. Teda $V \in \mathcal{U}$. Ukázali sme, že $\mathcal{U}$ je filter na X. Nech teraz $\mathcal{G}$ je filter na X a $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$. Pretože $\mathcal{G}$ je centrovaný systém na X, platí $\mathcal{U} = \mathcal{G}$. Teda $\mathcal{U}$ je ultrafilter na X. □

Dôsledok 10.1. *Ak $\mathcal{G}$ je centrovaný systém (báza filtra, filter) na množine X, tak existuje ultrafilter $\mathcal{U}$ na X, pre ktorý $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$.*

Veta 10.4. *Nech $\mathcal{F}$ je filter na množine X. Potom platí:*

1) $\mathcal{F}$ je ultrafilter na X práve vtedy, keď pre každé $A \in \mathcal{P}(X)$ také, že pre všetky $F \in \mathcal{F}$ je $A \cap F \neq \emptyset$, platí $A \in \mathcal{F}$.

2) $\mathcal{F}$ je ultrafilter práve vtedy, keď pre každé $A \in \mathcal{P}(X)$ platí $A \in \mathcal{F}$ alebo $X \backslash A \in \mathcal{F}$.

Dôkaz. 1) $\Rightarrow$: Zrejme $\mathcal{F} \cup \{A\}$ je centrovaný systém na X. Podľa predchádzajúceho dôsledku existuje ultrafilter $\mathcal{U}$ na X taký, že $\mathcal{F} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{U}$. Pretože $\mathcal{F}$ je ultrafilter, platí $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ a preto $A \in \mathcal{F}$.

$\Leftarrow$: Nech $\mathcal{F}$ nie je ultrafilter na X. Potom existuje filter $\mathcal{G}$ na X taký, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ a $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Nech $A \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F}$. Potom pre všetky $F \in \mathcal{F}$ platí $A \cap F \in \mathcal{G}$ a preto $A \cap F \neq \emptyset$ a súčasne $A \notin \mathcal{F}$. Dostali sme spor.

2) $\Rightarrow$: Nech $\mathcal{F}$ nie je ultrafilter na X a $A \in \mathcal{P}(X) \backslash \mathcal{F}$. Potom, podľa 1), existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $A \cap F = \emptyset$. Preto $F \subseteq X \backslash A$ a teda $X \backslash A \in \mathcal{F}$.

$\Leftarrow$: Nech $\mathcal{F}$ nie je ultrafilter na X. Potom existuje filter $\mathcal{G}$ na X, pre ktorý $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ a $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Nech $A \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F}$. Potom $X \backslash A \notin \mathcal{G}$ a preto $X \backslash A \notin \mathcal{F}$. Teda existuje $A \in \mathcal{P}(X)$ tak, že $A \notin \mathcal{F}$ a súčasne $X \backslash A \notin \mathcal{F}$. □

Teraz uvažujme o konvergencii postupností v topologických priestoroch.

Definícia 10.2. *Nech (a_n) je postupnosť prvkov topologického priestoru X.*

a) Hovoríme, že postupnosť (a_n) konverguje k bodu c v X, ak pre každé okolie U bodu c existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $k \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq k$ platí $a_k \in U$. Označenie: $a_n \longrightarrow c$, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ alebo $\lim a_n = c$.

Bod c sa nazýva limitou postupnosti (a_n) v priestore X.

b) Bod $c \in X$ nazývame hromadným bodom postupnosti (a_n), ak pre každé okolie U bodu c a pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $k \in \mathbb{N}$, $n \leq k$ tak, že $a_k \in U$.

Cvičenie 10.1. *Dokážte, že ak c je limita postupnosti (a_n) v priestore X, tak c je hromadný bod postupnosti (a_n) v X.*

Príklady 10.2. *1) Ak X je indiskrétny priestor a (a_n) je postupnosť v X, tak $a_n \longrightarrow c$ pre každé $c \in X$.*

2) Nech X je diskrétny priestor, (a_n) je postupnosť v X a $c \in X$. Potom $a_n \longrightarrow c$ v X práve vtedy, keď existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $k \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq k$ platí $a_k = c$.

3) Nech $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{R}\backslash\{0\} \cup \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : 0 \in U$ a $\mathbb{R}\backslash U$ je spočítateľná podmnožina $\}$. Nech (a_n) je postupnosť a $a_n \longrightarrow 0$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Nech $K = \{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$. Potom $U = \mathbb{R}\backslash\{a_k : k \in K\}$ je okolie 0 v $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé $m \geq n_0$ $a_m \in U$ a teda $a_m = 0$. Ak $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\{r\}$ je okolie r a $b_n \longrightarrow r$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ práve vtedy, keď všetky členy postupnosti(b_n) okrem konečného počtu sú rovné r. Teda postupnosť (a_n) konverguje v $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ k bodu c práve vtedy, keď konverguje v priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dis})$ k bodu c, pričom $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_{dis}$.

4) Nech X je priestor spĺňajúci 1. axiómu spočítateľnosti. Potom podmnožina U priestoru X je otvorená v X práve vtedy, keď pre každé $c \in U$ a každú postupnosť (a_n) v X, ktorá konverguje k c v X všetky členy tejto postupnosti okrem konečného počtu sú prvkami U. Implikácia $\Rightarrow$ je zrejmá a platí v každom topologickom priestore. Ukážeme platnosť implikácie $\Leftarrow$. Nech U nie je otvorená v X. Potom existuje $c \in U$ tak, že pre každé okolie W bodu c platí $W\backslash U \neq \emptyset$. Nech $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ je spočítateľná báza okolí c a pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $U_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Potom aj $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ je báza okolí c v X a pre každé n platí $U_{n+1} \subseteq U_n$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ vyberme $a_n \in U_n\backslash U$. Potom je zrejmé, že postupnosť (a_n) konverguje k c a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ $a_n \notin U$.

Pre priestory spĺňajúce 1. axiómu spočítateľnosti teda platí, že konvergencia postupností jednoznačne určuje topológiu takého priestoru.

.

Nech teraz X je ľubovoľný topologický priestor a (a_n) je postupnosť prvkov v X. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ nech $A_n = \{a_k : k \geq n\}$. Potom $\mathcal{H} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ je báza filtra na X a platí: Postupnosť (a_n) konverguje k c v X práve vtedy, keď pre každé okolie U bodu c existuje $H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq U$. Ak $\mathcal{F}$ je filter generovaný bázou $\mathcal{H}$, tak $a_n \longrightarrow c$ práve vtedy, keď $\mathcal{N}(c) \subseteq \mathcal{F}$ ($\mathcal{N}(c)$ je systém všetkých okolí bodu c v X). Ak $d \in X$, tak d je hromadný bod postupnosti (a_n) práve vtedy, keď $d \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \overline{H}$ a to je ekvivalentné s tým, že $c \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Ak (a_{n_k}) je podpostupnosť postupnosti (a_n) a tejto podpostupnosti priradíme analogickým spôsobom bázu filtra $\mathcal{H}'$ a filter $\mathcal{F}'$, tak platí $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Predchádzajúce pozorovania naznačujú, ako budeme definovať konvergenciu bázy filtra a filtra.

Definícia 10.3. *Nech X je topologický priestor, $\mathcal{F}$ je filter na X, $\mathcal{H}$ je báza filtra na X a $c \in X$.*

1) Hovoríme, že filter $\mathcal{F}$ konverguje k bodu c v priestore X, ak $\mathcal{N}(c) \subseteq \mathcal{F}$. Bod c sa potom nazýva limita filtra $\mathcal{F}$ v priestore X. Označenie: $\mathcal{F} \longrightarrow c$.

2) Hovoríme, že c je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$ v X, ak $c \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

3) Hovoríme, že báza filtra $\mathcal{H}$ konverguje k c v X, ak pre každé $U \in \mathcal{N}(c)$ existuje $H \in \mathcal{H}$ tak, že $H \subseteq U$ (je to ekvivalentné s tým, že $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} \longrightarrow c$, kde $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ je filter generovaný bázou filtra $\mathcal{H}$). Bod c sa nazýva limita bázy filtra $\mathcal{H}$ v X. Označenie: $\mathcal{H} \longrightarrow c$.

4) Hovoríme, že c je hromadný bod bázy filtra $\mathcal{H}$, ak $c \in \bigcap_{H\in\mathcal{H}} \overline{H}$ (je to ekvivalentné s tým, že c je hromadný bod $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$).

Príklady 10.3. *1) $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}\backslash A : A$ je konečná podmnožina $\mathbb{R}\}$ je filter na $\mathbb{R}$.*

a) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ filter $\mathcal{F}$ nekonverguje k žiadnemu bodu. Pretože pre konečnú podmnožinu $A \subseteq \mathbb{R}$ platí $\overline{\mathbb{R}\backslash A} = \mathbb{R}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, každé reálne číslo je hromadným bodom $\mathcal{F}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$.

b) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ platí $\mathcal{F} \longrightarrow c$ pre všetky $c \in \mathbb{R}$.

2) Nech $(n, \infty)_{\mathbb{Q}} = (n, \infty) \cap \mathbb{Q}$ a $\mathcal{H} = \{(n, \infty)_{\mathbb{Q}} : n \in \mathbb{N}\}$ je báza filtra na $\mathbb{R}$.

a) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ $\mathcal{H}$ nekonverguje k žiadnemu bodu a pretože $\overline{(n, \infty)_{\mathbb{Q}}} = [n, \infty)$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, $\mathcal{H}$ nemá hromadné body v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$.

b) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{+})$ pre každé $c > 1$ platí $\mathcal{H} \longrightarrow c$ a pretože $\overline{(n, \infty)_{\mathbb{Q}}} = \mathbb{R}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{+})$, všetky reálne čísla sú hromadné body $\mathcal{H}$ v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{+})$.

c) V priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ $\mathcal{H} \longrightarrow c$ pre všetky $c \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Nech X je množina, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ sú topológie na X. Nech pre každý filter $\mathcal{F}$ na X platí: $\mathcal{F} \longrightarrow c$ v priestore $(X, \mathcal{T})$ práve vtedy, keď $\mathcal{F} \longrightarrow c$ v priestore $(X, \mathcal{T}')$. Potom $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Skutočne, ak pre každé $c \in X$ označíme $\mathcal{N}(c)^{\mathcal{T}}$ systém všetkých okolí bodu c v $(X, \mathcal{T})$ a $\mathcal{N}(c)^{\mathcal{T}'}$ systém všetkých okolí bodu c v $(X, \mathcal{T}')$, tak, pretože $\mathcal{N}(c)^{\mathcal{T}} \longrightarrow c$ v $(X, \mathcal{T})$ platí aj $\mathcal{N}(c)^{\mathcal{T}} \longrightarrow c$ v $(X, \mathcal{T}')$ a preto $\mathcal{N}(c)^{\mathcal{T}'} \subseteq \mathcal{N}(c)^{\mathcal{T}}$. Podobne sa ukáže obrátená inklúzia a teda platí $\mathcal{N}(c)^{\mathcal{T}} = \mathcal{N}(c)^{\mathcal{T}'}$ pre každé $c \in X$. Z toho vyplýva, že $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Veta 10.5. *1) Ak filter (báza filtra) $\mathcal{F}$ konverguje k c v priestore X, tak c je hromadný bod $\mathcal{F}$ v X.*

2) Ak c je hromadný bod ultrafiltra $\mathcal{U}$ v priestore X, tak $\mathcal{U} \longrightarrow c$ v X.

Dôkaz. 1) Nech $F \in \mathcal{F}$. Pre každé $U \in \mathcal{N}(c)$ platí $U \in \mathcal{F}$ a teda $U \cap F \neq \emptyset$. Preto $c \in \overline{F}$ pre každé $F \in \mathcal{F}$.

2) Nech $c \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{U}$ a $V \in \mathcal{N}(c)$. Potom pre každé $U \in \mathcal{U}$ platí $V \cap U \neq \emptyset$ a pretože $\mathcal{U}$ je ultrafilter dostávame, že $V \in \mathcal{U}$ (veta 10.4.1)). Teda $\mathcal{N}(c) \subseteq \mathcal{U}$ a preto $\mathcal{U} \longrightarrow c$. $\square$

Nech X je množina, $c \in X$. Označme $\mathcal{F}_c = \{F \in \mathcal{P}(X) : c \in F\}$ hlavný ultrafilter určený prvkom c. Pre konvergenciu filtrov platia podobné vlastnosti ako pre konvergenciu postupností.

Veta 10.6. *Nech X je topologický priestor. Potom platí:*

1) Pre každé $c \in X$, $\mathcal{F}_c \longrightarrow c$ v X.

2) Ak filter $\mathcal{F}$ konverguje k c v X a pre filter $\mathcal{G}$ na X platí $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, tak aj $\mathcal{G}$ konverguje k c v X.

3) Ak c je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$ v X, tak existuje filter $\mathcal{G}$ na X tak, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ a $\mathcal{G} \longrightarrow c$ v X.

Dôkaz. (3) Nech c je hromadný bod $\mathcal{F}$. Potom pre každé $F \in \mathcal{F}$ platí $c \in \overline{F}$ a teda pre každé okolie $U \in \mathcal{N}(c)$ platí $U \cap F \neq \emptyset$. Zrejme systém $\mathcal{H} = \{U \cap F : U \in \mathcal{N}(c), F \in \mathcal{F}\}$ je báza filtra v X (ak $U_1 \cap F_1$ a $U_2 \cap F_2$ patria do $\mathcal{H}$, tak aj $(U_1 \cap F_1) \cap (U_2 \cap F_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{H}$). Zrejme $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ a $\mathcal{N}(c) \subseteq \mathcal{H}$.

Pre filter $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ generovaný bázou filtra $\mathcal{H}$ platí $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ a tiež $\mathcal{N}(c) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ a preto $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} \longrightarrow c$. □

Veta 10.7. *Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$ a $c \in X$. Potom sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*

1) $c \in \overline{A}$ v X.

2) Existuje báza filtra (filter) $\mathcal{G}$ na A tak, že $\mathcal{G} \longrightarrow c$ v X (t. j. ako báza filtra v X).

3) Existuje filter $\mathcal{F}$ na X taký, že $A \in \mathcal{F}$ a $\mathcal{F} \longrightarrow c$ v X.

Dôkaz. 1) $\Rightarrow$ 2): Pretože $c \in \overline{A}$, pre každé $U \in \mathcal{N}(c)$ platí $U \cap A \neq \emptyset$. Systém $\mathcal{G} = \{U \cap A : U \in \mathcal{N}(c)\}$ je báza filtra na A, je to aj báza filtra na X a pretože pre každé $U \in \mathcal{N}(c)$ platí $U \cap A \subseteq U$, máme $\mathcal{G} \longrightarrow c$.

2) $\Rightarrow$ 3): Nech $\mathcal{G}$ je báza filtra na A taká, že $\mathcal{G} \longrightarrow c$ v X. Potom $\mathcal{G}$ je aj báza filtra na X a pre filter $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ na X generovaný bázou filtra $\mathcal{G}$ platí $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. Nech $U \in \mathcal{N}(c)$. Potom existuje $H \in \mathcal{G}$ tak, že $H \subseteq U$ a preto $U \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. Teda $\mathcal{N}(c) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ a preto $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} \longrightarrow c$ v X.

3) $\Rightarrow$ 1): Nech $\mathcal{F}$ je filter na X, $A \in \mathcal{F}$ a $\mathcal{F} \longrightarrow c$ v X. Nech $U \in \mathcal{N}(c)$. Potom $U \in F$ a preto $U \cap A \in \mathcal{F}$. Teda pre každé každé $U \in \mathcal{N}(c)$ je $U \cap A \neq \emptyset$ a preto $c \in \overline{A}$. □

Pomocou konvergencie filtrov je možné charakterizovať T_2-priestory.

Veta 10.8. *Topologický priestor X je T_2-priestor práve vtedy, keď každý filter konverguje najviac k jednému bodu v X.*

Dôkaz. $\Rightarrow$: Nech filter $\mathcal{F}$ na X konverguje k bodom c, d a $c \neq d$. Potom $\mathcal{N}(c) \cup \mathcal{N}(d) \subseteq \mathcal{F}$ a preto pre každé $U \in \mathcal{N}(c)$ a každé $V \in \mathcal{N}(d)$ platí $U \cap V \in \mathcal{F}$ a preto $U \cap V \neq \emptyset$. Teda X nie je T_2-priestor.

$\Leftarrow$: Nech X nie je T_2-priestor. Potom existujú $c, d \in X$, $c \neq d$ také, že pre každé $U \in \mathcal{N}(c)$ a každé $V \in \mathcal{N}(d)$ platí $U \cap V \neq \emptyset$. Systém $\mathcal{H} = \{U \cap V : U \in \mathcal{N}(c), V \in \mathcal{N}(d)\}$ je báza filtra a $\mathcal{N}(c) \cup \mathcal{N}(d) \subseteq \mathcal{H}$ (ak $U \in \mathcal{N}(c)$, tak $U = U \cap X \in \mathcal{H}$, ak $V \in \mathcal{N}(d)$, tak $V = X \cap V \in \mathcal{H}$). Potom pre filter $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ generovaný bázou filtra $\mathcal{H}$ platí $\mathcal{N}(c) \cup \mathcal{N}(d) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ a preto $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} \longrightarrow c$ a súčasne $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} \longrightarrow d$. □

Pomocou konvergencie filtrov, resp. báz filtrov je možné charakterizovať aj spojitosť zobrazení.

Veta 10.9. *Nech X, Y sú topologické priestory a $f: X \longrightarrow Y$ je zobrazenie. Potom f je spojité práve vtedy, keď pre každý filter $\mathcal{F}$ na X platí: Ak $\mathcal{F} \longrightarrow c$ v priestore X tak báza filtra $f[\mathcal{F}]$ konverguje k $f(c)$ v priestore Y.*

Dôkaz. $\Rightarrow$: Nech $\mathcal{F} \longrightarrow c$ v priestore X a $V \in \mathcal{N}^Y(f(c))$. Pretože f je spojité, $f_{-1}[V] \in \mathcal{N}^X(c) \subseteq \mathcal{F}$. Potom $f[f_{-1}[V]] \in f[\mathcal{F}]$ a $f[f_{-1}[V]] \subseteq V$. Teda $f[\mathcal{F}] \longrightarrow f(c)$ v Y.

$\Leftarrow$: Nech $c \in X$. Platí $\mathcal{N}^X(c) \longrightarrow c$ a preto $f[\mathcal{N}^X(c)] \longrightarrow f(c)$ v Y. Potom pre každé $V \in \mathcal{N}^Y(f(c))$ existuje $U \in \mathcal{N}^X(c)$ tak, že $f[U] \subseteq V$ a teda f je spojité. □

Veta 10.10. *Nech $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ je systém topologických priestorov, $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ je topologický súčin tohoto systému, p_α sú prirodzené projekcie a $\mathcal{F}$ je filter na X. Potom $\mathcal{F} \longrightarrow c$ v X práve vtedy, keď pre každé $\alpha \in A$ platí $p_\alpha[\mathcal{F}] \longrightarrow p_\alpha(c)$ v X_α.*

Dôkaz. $\Rightarrow$: Vyplýva zo spojitosti p_α a predchádzajúcej vety.

$\Leftarrow$: Nech U je okolie c v X. Potom existuje prvok $V = \bigcap_{i=1}^{k} (p_{\alpha_i})_{-1}[V_i]$, kde $k \in \mathbb{N}$ $\alpha_i \in A$ a V_i je otvorená v X_i, štandardnej bázy súčinovej topológie, pre ktorý platí $c \in V \subseteq U$. Zrejme $p_{\alpha_i}(c) \in V_i$, V_i je okolie $p_{\alpha_i}(c)$ a pretože $p_{\alpha_i}[\mathcal{F}] \longrightarrow p_{\alpha_i}(c)$ v X_{α_i}, existuje $F_i \in \mathcal{F}$ tak, že $p_{\alpha_i}[F_i] \subseteq V_i$ a preto $F_i \subseteq (p_{\alpha_i})_{-1}[V_i]$ pre všetky i. Potom $F = \bigcap_{i=1}^{k} F_i \in \mathcal{F}$ a $F \subseteq V \subseteq U$. Teda $U \in \mathcal{F}$ a preto $\mathcal{F} \longrightarrow c$ v X. □

Pomocou konvergencie filtrov je možné charakterizovať aj kompaktnosť.

Veta 10.11. *Pre každý topologický priestor X sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*

1) X je kompaktný.

2) Každý filter na X má hromadný bod v X.

3) Každý ultrafilter na X konverguje v X.

Dôkaz. 1) $\Rightarrow$ 2): Nech $\mathcal{F}$ je filter na X. Potom $\mathcal{F}$ je centrovaný systém a podľa vety 9.5 platí $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$. Teda $\mathcal{F}$ má hromadný bod v X.

2) $\Rightarrow$ 3): Nech $\mathcal{U}$ je ultrafilter na X. Potom $\mathcal{U}$ má hromadný bod c v X a podľa vety 10.5.2) $\mathcal{U} \longrightarrow c$ v X.

3) $\Rightarrow$ 1): Nech $\mathbb{C}$ je centrovaný systém na X. Podľa dôsledku 10.1 existuje ultrafilter $\mathcal{U}$ na X, pre ktorý $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{U}$. Potom existuje $c \in X$ tak, že $\mathcal{U} \longrightarrow c$ a preto c je hromadný bod $\mathcal{U}$. Z toho vyplýva, že $c \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{U} \subseteq \bigcap_{C\in\mathbb{C}} \overline{C}$ a preto $\bigcap_{C\in\mathbb{C}} \overline{C} \neq \emptyset$. Teda X je kompaktný. □

Teraz sa budeme zaoberať konvergenciou sietí v topologických priestoroch. Pojem siete je zovšeobecnením pojmu postupnosti, pričom definičný obor postupnosti, ktorým je množina $\mathbb{N}$ s prirodzeným usporiadaním je pri sieti nahradený usmernenou množinou.

Definícia 10.4. *Usporiadaná dvojica $(A, \leq)$ sa nazýva usmernená množina, ak $A \neq \emptyset$ a $\leq$ je relácia na A spĺňajúca nasledujúce podmienky:*

1) Pre každé $a \in A$ platí $a \leq a$.

2) Pre každé $a, b, c \in A$ platí: Ak $a \leq b$ a $b \leq c$, tak $a \leq c$.

3) Pre každé $a, b \in A$ existuje $c \in A$ také, že $a \leq c$ a súčasne $b \leq c$.

Príklady 10.4. *1) Každá neprázdna usporiadaná mmnožina je usmernená množina.*

2) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ aj $(\mathcal{P}(X), \supseteq)$ sú usmernené množiny.

3) Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a $\mathcal{B}(a)$ je báza okolí bodu a v X. Potom $(\mathcal{B}(a), \supseteq)$ je usmernená množina ($U \leq V$ práve vtedy, keď $U \supseteq V$, t. j. $\supseteq$ chápeme ako inverznú reláciu k $\subseteq$).

4) Nech X je neprázdna množina a $\mathcal{F}$ je filter na X. Nech $\Sigma = \{(x, F) \in X \times \mathcal{F} : F \in \mathcal{F}, x \in F\}$ a pre $(x, F), (y, H) \in X \times \mathcal{F})$ je $(x, F) \leq (y, H)$ práve vtedy, keď $F \supseteq H$. Potom $(\Sigma, \leq)$ je usmernená množina.

Definícia 10.5. *Nech X je topologický priestor a Σ je usmernená množina.*

1) Zobrazenie $f : \Sigma \longrightarrow X$ sa nazýva sieť v X. Ak $\sigma \in \Sigma$, tak namiesto $f(\sigma)$ budeme písať x_σ (y_σ, a_σ a pod.) a sieť budeme označovať $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ prípadne len (x_σ).

2) Nech $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ je sieť v priestore X, $c \in X$. Hovoríme, že sieť $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ konverguje k c v X, ak pre každé okolie U bodu c existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že pre každé $\sigma \in \Sigma$, $\sigma_0 \leq \sigma$ platí $x_\sigma \in U$. Bod c sa potom nazýva limita siete $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ v X. Označenie: $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$, $x_\sigma \longrightarrow c$, $\lim(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) = c$.

3) Bod $c \in X$ sa nazýva hromadný bod siete $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ v X ak pre každé okolie U bodu c a každé $\sigma \in \Sigma$ existuje $\sigma' \in \Sigma$ tak, že $\sigma \leq \sigma'$ a $x_{\sigma'} \in U$.

Príklady 10.5. *1) Každá postupnosť v priestore X je sieť v X.*

2) Nech $\mathbb{Q}^- = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$. Potom $(\mathbb{Q}^-, \leq)$, kde $\leq$ je prirodzené usporiadanie na $\mathbb{Q}^-$ je usmernená množina. Pre každé $r \in \mathbb{Q}^-$ definujme $x_r = r$. Potom $(x_r : r \in \mathbb{Q}^-)$ je sieť v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, ktorá konverguje k 0 v tomto priestore.

3) Nech f je ohraničená funkcia na uzavretom intervale $[a, b]$, $a < b$. Množina Σ pozostáva zo všetkých usporiadaných dvojíc $(D, (c_i))$, kde $D = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ je delenie intervalu $[a, b]$ a $(c_i) = (c_1, ..., c_n)$ je usporiadaná n-tica reálnych čísel pre ktorú $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Pre každé $(D, (c_i)), (D', (c'_j)) \in \Sigma$ definujme $(D, (c_i)) \leq (D', (c'_j))$ práve vtedy, keď $\nu(D') \leq \nu(D)$, kde $\nu(D)$ označuje normu delenia D. Nech pre každé $(D, (c_i))$ je $x_{(D,(c_i))} = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Potom $(x_{(D,(c_i))} : (D, (c_i)) \in \Sigma$ je sieť v $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, ktorá, ak konverguje, tak konverguje k Riemannovmu integrálu funkcie f na intervale $[a, b]$.

Veta 10.12. *Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$ a $c \in X$. Potom platí: $c \in \overline{A}$ práve vtedy, keď existuje sieť $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ v A,ktorá konverguje k c v X.*

Dôkaz. $\Rightarrow$: $(\mathcal{N}(c), \supseteq)$ je usmernená množina ($U \leq V \Leftrightarrow U \supseteq V$). Pre každé $U \in \mathcal{N}(c)$ vyberme $x_U \in U \cap A$. Je zrejmé, že sieť $(x_U : U \in \mathcal{N}(c))$ konverguje k c.

$\Leftarrow$: Nech $U \in \mathcal{N}(c)$. Potom existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že pre všetky $\sigma \in \Sigma$, $\sigma_0 \leq \sigma$ platí $x_\sigma \in U$. Teda $x_{\sigma_0} \in U \cap A$ a preto $U \cap A \neq \emptyset$ Teda $c \in \overline{A}$. $\square$

Analógiou pojmu podpostupnosti je pojem podsiete.

Definícia 10.6. *Nech X je topologický priestor. Hovoríme, že sieť $(y_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma')$ je podsieťou (zjemnením) siete $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ ak platí:*

1) Existuje zobrazenie $\varphi : \Sigma' \longrightarrow \Sigma$ také,že

a) ak $\sigma'_1, \sigma'_2 \in \Sigma'$ a $\sigma'_1 \leq \sigma'_2$, tak $\varphi(\sigma'_1) \leq \varphi(\sigma'_2)$,

b) pre každé $\sigma \in \Sigma$ existuje $\sigma' \in \Sigma'$ tak, že $\sigma \leq \varphi(\sigma')$.

2) Pre každé $\sigma' \in \Sigma'$ platí $y_{\sigma'} = x_{\varphi(\sigma')}$.

Podsiete majú v súvislosti s konvergenciou podobné vlastnosti ako podpostupnosti.

Veta 10.13. *1) Ak sieť* $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ *konverguje k* c *v priestore* X*, tak každá podsieť* $(y_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma')$ *tejto siete tiež konverguje k* c *v* X*.*

2) Ak c *je hromadný bod siete* $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ *v priestore* X*, tak existuje podsieť* $(y_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma')$ *siete* $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$*, ktorá konverguje k* c *v* X*.*

Dôkaz. 1) Nech U je okolie c. Potom existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že pre všetky $\sigma \in \Sigma$ také, že $\sigma_0 \leq \sigma$ platí $x_\sigma \in U$. Nech $\varphi : \Sigma' \longrightarrow \Sigma$ je zobrazenie z definície podsiete. Potom existuje $\sigma'_0 \in \Sigma'$ také, že $\sigma_0 \leq \varphi(\sigma'_0)$. Pre každé $\sigma' \in \Sigma'$, pre ktoré $\sigma'_0 \leq \sigma'$ platí $\sigma_0 \leq \varphi(\sigma'_0) \leq \varphi(\sigma')$ a preto $y_{\sigma'} = x_{\varphi(\sigma')} \in U$. Teda $(y_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma')$ konverguje k c v X.

2) Definujme množinu $\Sigma' = \{(\sigma, U) \in \Sigma \times \mathcal{N}(c) : x_\sigma \in U\}$. Ak $\sigma \in \Sigma$, tak $(\sigma, X) \in \Sigma'$ a preto $\Sigma' \neq \emptyset$. Definujme reláciu $\leq$ na Σ' takto: $(\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_2, U_2)$ práve vtedy, keď $\sigma_1 \leq \sigma_2$ a súčasne $U_1 \supseteq U_2$). Je zrejmé, že táto relácia je reflexívna a tranzitívna. Nech $(\sigma_1, U_1), (\sigma_2, U_2) \in \Sigma'$. Potom existuje $\sigma_3 \in \Sigma$, pre ktoré platí $\sigma_1 \leq \sigma_3$ a súčasne $\sigma_2 \leq \sigma_3$. Nech $U_3 = U_1 \cap U_2$. Potom $U_3 \in \mathcal{N}(c)$ a pretože c je hromadný bod siete $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$, existuje $\sigma_4 \in \Sigma$ také, že $\sigma_3 \leq \sigma_4$ a $x_{\sigma_4} \in U_3$. Potom $(\sigma_4, U_3) \in \Sigma'$ a platí $(\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_4, U_3)$ a tiež $(\sigma_2, U_2) \leq (\sigma_4, U_3)$. Teda $(\Sigma', \leq)$ je usmernená množina. Definujme teraz sieť $(y_{(\sigma,U)} : (\sigma, U) \in \Sigma')$ predpisom $y_{(\sigma,U)} = x_\sigma$. Táto sieť je podsieťou siete $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$. Skutočne, ak definujeme $\varphi : \Sigma' \longrightarrow \Sigma$ predpisom $\varphi((\sigma, U)) = \sigma$, tak pre $(\sigma_1, U_1) \leq (\sigma_2, U_2)$ dostávame $\varphi((\sigma_1, U_1)) = \sigma_1 \leq \sigma_2 = \varphi((\sigma_2, U_2))$ a pre každé $\sigma \in \Sigma$ existuje $(\sigma, X) \in \Sigma'$ také, že $\sigma \leq \varphi((\sigma, X))$. Platí tiež $y_{(\sigma,U)} = x_\sigma = x_{\varphi((\sigma,U))}$ pre každé $(\sigma, U) \in \Sigma'$. Ukážeme, že $(y_{(\sigma,U)} : (\sigma, U) \in \Sigma') \longrightarrow c$. Nech U je okolie c, a nech $\sigma_1 \in \Sigma$. Potom existuje $\sigma_0 \in \Sigma$, $\sigma_1 \leq \sigma_0$ tak, že $x_{\sigma_0} \in U$. Potom $(\sigma_0, U) \in \Sigma'$ a pre každé $(\sigma, V) \in \Sigma'$, pre ktoré $(\sigma_0, U) \leq (\sigma, V)$ platí $y_{(\sigma,V)} = x_\sigma \in V \subseteq U$. Teda $(y_{(\sigma,U)} : (\sigma, U) \in \Sigma') \longrightarrow c$. $\square$

Pre konvergenciu sietí platia podobné vety ako pre konvergenciu filtrov.

Veta 10.14. *1) Nech* X*,* Y *sú topologické priestory a* $f : X \longrightarrow Y$ *je zobrazenie. Potom* f *je spojité práve vtedy keď platí: Ak* $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ *je sieť v* X *a* $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$ *v* X*, tak* $(f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow f(c)$ *v* Y*.*

2) Ak $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *je systém topologických priestorov,* $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *je topologický súčin tohoto systému a* $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ *je sieť v* X*, tak* $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$ *v* X *práve vtedy, keď pre každé* $\alpha \in A$*,* $(p_\alpha(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow p_\alpha(c)$*.*

3) Topologický priestor X *je kompaktný práve vtedy, keď každá sieť v* X *má hromadný bod.*

4) Topologický priestor X *je* T_2*-priestor práve vtedy, keď každá sieť v* X *má najviac jednu limitu.*

Dôkaz. 1) Nech f je spojité, $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$ v X a V je okolie $f(c)$ v Y. Potom existuje okolie U bodu c v X tak, že $f[U] \subseteq V$ a tiež existuje $\sigma_0 \in \Sigma$, také, že ak $\sigma \in \Sigma$ a $\sigma_0 \leq \sigma$, tak $x_\sigma \in U$ a preto $f(x_\sigma) \in V$. Teda $(f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow f(c)$ v Y.

Obrátene, nech $A \subseteq X$ a $c \in \overline{A}$. Potom existuje sieť $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ v A tak, že $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$ v X. Potom $(f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma)$ je sieť v množine $f[A]$, $(f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow f(c)$ v Y a preto $f(c) \in \overline{f[A]}$ v Y. Teda $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ a preto je f spojité zobrazenie.

2) Z 1) a zo spojitosti prirodzených projekcií vyplýva, že ak $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X, a $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$ v X, tak pre každé $\alpha \in A$, $(p_\alpha(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow p_\alpha(c)$.

Obrátene, nech $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X a pre každé $\alpha \in A$, $(p_\alpha(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow p_\alpha(c)$. Nech U je okolie c v X. Potom existuje prvok $V = \bigcap_{i=1}^{k}(p_{\alpha_i})_{-1}[V_i]$, kde $k \in \mathbb{N}$ $\alpha_i \in A$ a V_i je otvorená v X_i, štandardnej bázy súčinovej topológie, pre ktorý platí $c \in V \subseteq U$. Zrejme $p_{\alpha_i}(c) \in V_i$, V_i je okolie $p_{\alpha_i}(c)$ v X_α a existuje $\sigma_i \in \Sigma$ tak, že ak $\sigma \in \Sigma$ a $\sigma_i \leq \sigma$ tak $p_{\alpha_i}(x_\sigma) \in V_i$. Nech $\sigma_0 \in \Sigma$ také, že pre všetky $i \in \{1, ..., k\}$ platí $\sigma_i \leq \sigma_0$. Ak $\sigma \in \Sigma$ a $\sigma_0 \leq \sigma$, tak pre všetky i platí $p_{\alpha_i}(x_\sigma) \in V_i$ a preto $x_\sigma \in \bigcap_{i=1}^{k}(p_{\alpha_i})_{-1}[V_i] = V \subseteq U$. Teda $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$ v X.

3) Nech X je kompaktný priestor a $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X. Nech pre každé $\sigma \in \Sigma$ je $H_\sigma = \{x_{\sigma'} : \sigma \leq \sigma'\}$. Systém $\mathcal{H} = \{H_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ je zrejme báza filtra a teda aj centrovaný systém podmnožín priestoru X. Pretože X je kompaktný, $\bigcap_{\sigma\in\Sigma} \overline{H_\sigma} \neq \emptyset$. Nech $c \in \bigcap_{\sigma\in\Sigma} \overline{H_\sigma}$. Potom pre každé okolie U bodu c a každé $\sigma \in \Sigma$ je $U \cap H_\sigma \neq \emptyset$ a teda c je hromadný bod siete $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$.

Obrátene, nech každá sieť $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ v priestore X má hromadný bod a $\mathbb{C}$ je centrovaný systém na X. Potom $\mathcal{H} = \{\bigcap_{i=1}^{k} C_i : k \in \mathbb{N}, C_i \in \mathbb{C}\}$ je báza filtra na X (pozri veta 10.1.1)), $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{H}$ a $(\mathcal{H}, \supseteq)$ je usmernená množina. Pre každé $H \in \mathcal{H}$ vyberme $x_H \in H$. Potom $(x_H : H \in \mathcal{H})$ je sieť v X. Nech c je hromadný bod siete $(x_H : H \in \mathcal{H})$, U je okolie c a $H \in \mathcal{H}$. Potom existuje $H' \in \mathcal{H}$, $H \supseteq H'$ tak, že $x_{H'} \in U$. Pretože $x_{H'} \in H' \subseteq H$, platí $U \cap H \neq \emptyset$. Teda $c \in \bigcap_{H\in\mathcal{H}} \overline{H} \subseteq \bigcap_{C\in\mathbb{C}} \overline{C}$ a preto X je kompaktný.

4) Cvičenie. □

Nasledujúce dve vety hovoria o vzťahu medzi konvergenciou filtrov a sietí.

Veta 10.15. *Nech $S = (x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ je sieť v priestore X a $\mathcal{F}_S = \{F \in \mathcal{P}(X) :$ existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že pre každé $\sigma \in \Sigma$, $\sigma_0 \leq \sigma$ platí $x_\sigma \in F\}$. Potom $\mathcal{F}_S$ je filter na X a platí: $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$ práve vtedy, keď $\mathcal{F}_S \longrightarrow c$ v X.*

Dôkaz. Zrejme $\emptyset \notin \mathcal{F}_S$. Pre každé $\sigma \in \Sigma$ nech $H_\sigma = \{x_{\sigma'} : \sigma \leq \sigma'\}$. Nech $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_S$. Potom existujú $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ tak, že $H_{\sigma_1} \subseteq F_1$ a $H_{\sigma_2} \subseteq F_2$ a existuje $\sigma_3 \in \Sigma$, pre ktoré $\sigma_1 \leq \sigma_3$ a $\sigma_2 \leq \sigma_3$. Potom, zrejme, $H_{\sigma_3} \subseteq H_{\sigma_1} \cap H_{\sigma_2} \subseteq F_1 \cap F_2$ a teda $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_S$. Ak $F \in \mathcal{F}_S$ a $F \subseteq V \subseteq X$, tak existuje $\sigma \in \Sigma$, pre ktoré $H_\sigma \subseteq F \subseteq V$. Preto $V \in \mathcal{F}_S$. Teda $\mathcal{F}_S$ je filter na X.

Nech teraz $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$ a U je okolie c v X. Potom existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že $H_{\sigma_0} \subseteq U$ a teda $U \in \mathcal{F}_S$. Preto $\mathcal{N}(c) \subseteq \mathcal{F}_S$ a $\mathcal{F}_S \longrightarrow c$.

Obrátene, nech $\mathcal{F}_S \longrightarrow c$ a nech U je okolie c v X. Potom $U \in \mathcal{F}_S$ a preto existuje $\sigma_0 \in \Sigma$ tak, že $H_{\sigma_0} \subseteq U$. To ale znamená, že $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma) \longrightarrow c$ v X. □

Cvičenie 10.2. *Dokážte, že $c \in X$ je hromadný bod siete $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ práve vtedy, keď c je hromadný bod filtra $\mathcal{F}_S$ v X.*

Veta 10.16. *Nech $\mathcal{F}$ je filter v priestore X, $S_\mathcal{F} = (x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$, kde $\Sigma = \{(c, F) \in X \times \mathcal{F} : c \in F\}$, pre každé $(c, F), (d, G) \in \Sigma$ je $(c, F) \leq (d, G) \Leftrightarrow$*

$F \supseteq G$ a pre každé $(c, F) \in \Sigma$ platí $x_{(c,F)} = c$. Potom $S_{\mathcal{F}}$ je sieť v X a platí: $S_{\mathcal{F}} \longrightarrow a$ práve vtedy, keď $\mathcal{F} \longrightarrow a$ v X.

Dôkaz. Je zrejmé (pozri tiež príklady 10.4.4)), že $(\Sigma, \leq)$ je usmernená množina a $S_{\mathcal{F}} = (x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X.

Nech $S_{\mathcal{F}}$ konverguje k a v X a nech U je okolie a. Potom existuje $(c_0, F_0) \in \Sigma$ tak, že ak $(c, F) \in \Sigma$ a $(c_0, F_0) \leq (c, F)$, tak $x_{(c,F)} = c \in U$. Pre každé $c \in F_0$ platí $(c_0, F_0) \leq (c, F_0)$ a preto $x_{(c,F_0)} = c \in U$. Teda $F_0 \subseteq U$ a preto $U \in \mathcal{F}$. Dokázali sme, že $\mathcal{F} \longrightarrow a$.

Obrátene, nech $\mathcal{F} \longrightarrow a$ a U je okolie a. Potom $U \in \mathcal{F}$, $a \in U$ a preto $(a, U) \in \Sigma$. Ak $(c, F) \in \Sigma$ a $(a, U) \leq (c, F)$, tak $c \in F$, $F \subseteq U$ a preto $x_{(c,F)} = c \in U$. Teda $S_{\mathcal{F}} \longrightarrow a$ v X. □

Cvičenie 10.3. *Dokážte, že $c \in X$ je hromadný bod siete $S_{\mathcal{F}}$ práve vtedy, keď c je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$ v X.*

11 Súvislé priestory

Súvislosť metrického priestoru (X, d) znamená, že ak A, B sú neprázdne podmnožiny X a $X = A \cup B$, tak aspoň jedna z týchto množín obsahuje prvok, ktorý má nulovú vzdialenosť od druhej množiny. Topologicky sa to dá vyjadriť tak, že $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ alebo $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Potom topologický priestor X je súvislý, ak pre každé dve neprázdne podmnožiny A, B priestoru X také, že $X = A \cup B$ platí $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ alebo $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ a teda topologický priestor X nie je súvislý, ak existujú neprázdne podmnožiny A, B priestoru X také, že $X = A \cup B$, pre ktoré platí $A \cap \overline{B} = \emptyset$ a súčasne $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Potom ale platí $A \cap B = \emptyset$, $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$ a teda A, B sú uzavreté a súčasne otvorené podmnožiny priestoru X. Z tejto úvahy dostávame nasledujúcu často používanú definíciu súvislého priestoru.

Definícia 11.1. *1) Topologický priestor sa nazýva súvislý,ak má nasledujúcu vlastnosť: Ak $X = U \cup V$, U, V sú otvorené podmnožiny X a $U \cap V = \emptyset$, tak $U = \emptyset$ alebo $V = \emptyset$. Podmnožina A priestoru X sa nazýva súvislá, ak podpriestor určený množinou A je súvislý priestor.*

2) Topologický priestor sa nazýva lokálne súvislý, ak pre každé $a \in X$ existuje báza okolí $\mathcal{B}_a$ bodu a taká, že každé okolie patriace do $\mathcal{B}_a$ je súvislá množina.

Je zrejmé, že pre topologický priestor X sú nasledujúce výroky ekvivalentné:

1) X je súvislý

2) Ak $X = A \cup B$, A, B sú uzavreté podmnožiny X a $A \cap B = \emptyset$, tak $A = \emptyset$, alebo $B = \emptyset$.

3) Ak C je uzavretá a súčasne otvorená podmnožina X, tak $C = \emptyset$ alebo $C = X$.

4) Ak $X = K + L$ tak $K = \emptyset$ alebo $L = \emptyset$.

Príklady 11.1. *1) Každý indiskrétny topologický priestor je súvislý aj lokálne súvislý.*

2) Neprázdny podpriestor priestoru $\mathbb{R}$ (s prirodzenou topológiou) je súvislý práve vtedy, keď je jednoprvkový alebo je to interval.

Nech podpriestor J priestoru $\mathbb{R}$ má viac ako jeden prvok a J nie je interval. Potom existujú $a, b \in J$, $a < b$ a $c \in \mathbb{R} \setminus J$ tak, že $a < c < b$. Množiny $U = (-\infty, c) \cap J$ a $V = J \cap (c, \infty)$ sú otvorené v J, neprázdne, $J = U \cup V$ a $U \cap V = \emptyset$. Teda J nie je súvislý.

Nech podpriestor J priestoru $\mathbb{R}$ nie je súvislý. Potom J má viac ako jeden prvok a existujú neprázdne uzavreté podmnožiny A, B priestoru J také, že $J = A \cup B$ a $A \cap B = \emptyset$. Nech $a \in A$, $b \in B$ a nech, napríklad, $a < b$. Pre množinu $K = \{x \in A : x < b\}$ existuje $\sup K = c$ a pretože A je uzavretá v J platí $c \in A$ a tiež platí $c < b$. Pre množinu $L = \{y \in B : c < y\}$ existuje $\inf L = d$ a pretože B je uzavretá, máme $d \in B$. Zrejme $c < d$ a prvok $\frac{c+d}{2} \notin A \cup B = J$. Teda J nie je interval.

Špeciálne, $\mathbb{R}$ je súvislý aj lokálne súvislý priestor, priestor $[0, 1]$ je súvislý aj lokálne súvislý priestor.

3) Diskrétny priestor, ktorý má aspoň dva (rôzne) prvky nie je súvislý ale je lokálne súvislý.

4) Sorgenfreyova priamka S nie je súvislý priestor, pretože podmnožina $[0, 1)$ priestoru S je súčasne otvorená aj uzavretá v S. Nie je ani lokálne súvislý.

5) Ak Y je podpriestor priestoru X, $A \subseteq Y$, tak A je súvislá podmnožina priestoru Y práve vtedy, keď A je súvislá podmnožina priestoru X.

Veta 11.1. *Ak $f : X \longrightarrow Y$ je spojité zobrazenie a X je súvislý priestor, tak aj Y je súvislý priestor.*

Dôkaz. Nech U, V sú otvorené podmnožiny priestoru Y, $Y = U \cup V$ a $U \cap V = \emptyset$. Potom $U' = f_{-1}[U]$, $V' = f_{-1}[V]$ sú otvorené podmnožiny priestoru X, $X = U' \cup V'$ a $U' \cap V' = \emptyset$. Pretože X je súvislý, platí $U' = \emptyset$ alebo $V' = \emptyset$ a z toho vyplýva, že $U = \emptyset$ alebo $V = \emptyset$. Teda Y je súvislý priestor. $\square$

Z predchádzajúcej vety napríklad vyplýva, že každý súvislý $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor X, ktorý má viac ako jeden prvok má mohutnosť aspoň $2^{\aleph_0}$. Skutočne, ak $a, b \in X$, $a \neq b$, tak $\{a\}$ je uzavretá podmnožina X a preto existuje spojité zobrazenie $f : X \longrightarrow [0, 1]$ také, že $f(a) = 0$ a $f(b) = 1$. Pretože podpriestor $f[X]$ priestoru $[0, 1]$ je súvislý, je to interval, $0, 1 \in f[X]$, platí $f[X] = [0, 1]$. Z tohoto vyplýva, že napríklad priestor $\mathbb{Q}$ s prirodzenou topológiou nie je súvislý.

Veta 11.2. *Ak $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ je neprázdny systém súvislých podmnožín priestoru X a $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$, tak $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je súvislá podmnožina priestoru X.*

Dôkaz. Nech $c \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, U, V sú otvorené podmnožiny podpriestoru A také, že $A = U \cup V$ a $U \cap V = \emptyset$. Nech, napríklad, $c \in U$. Pre každé $\alpha \in I$ sú $U_\alpha = U \cap A_\alpha$, $V_\alpha = V \cap A_\alpha$ otvorené podmnožiny v podpriestore A_α, $A_\alpha = U_\alpha \cup V_\alpha$, $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$ a $c \in U_\alpha$. Pretože A_α je súvislý priestor, dostávame $V_\alpha = \emptyset$ pre každé α. Potom $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = \emptyset$ a teda A je súvislý podpriestor priestoru X. $\square$

Veta 11.3. *Nech A je súvislá podmnožina priestoru X, $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Potom aj B je súvislá podmnožina priestoru X.*

Dôkaz. Nech B nie je súvislá podmnožina priestoru X. Potom existujú otvorené neprázdne podmnožiny U, V podpriestoru B, také, že $B = U \cup V$ a $U \cap V = \emptyset$. Nech $a \in U$ a U' je otvorená podmnožina priestoru X, pre ktorú $U' \cap B = U$. Potom U' je okolie a v X a pretože $a \in \overline{A}$, máme $U' \cap A = U \cap A = U_1 \neq \emptyset$. Podobne sa ukáže, že $V \cap A = V_1 \neq \emptyset$. Ale U_1, V_1 sú otvorené neprázdne podmnožiny podpriestoru A, pre ktoré $A = U_1 \cup V_1$ a $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Teda A nie je súvislá podmnožina priestoru X. □

Veta 11.4. *Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a C_a je zjednotenie systému všetkých súvislých podmnožín priestoru X obsahujúcich prvok a. Potom platí:*

1) Pre každé $a \in X$ je C_a súvislá a uzavretá množina.

2) Ak $a, b \in X$, tak $C_a = C_b$ alebo $C_a \cap C_b = \emptyset$.

3) Pre každé $a \in X$ je C_a maximálna súvislá podmnožina priestoru X, t. j. ak A je súvislá podmnožina X a $C_a \subseteq A$, tak $C_a = A$.

Množina C_a sa nazýva komponenta súvislosti bodu a v priestore X.

Dôkaz. 1) Z vety 11.2 vyplýva, že C_a je súvislá a z vety 11.3 vyplýva, že aj $\overline{C_a}$ je súvislá podmnožina X. Pretože $a \in \overline{C_a}$, z definície C_a vyplýva, že $\overline{C_a} \subseteq C_a$. Teda C_a je uzavretá podmnožina priestoru X.

2) Nech $C_a \cap C_b \neq \emptyset$. Potom $C_a \cup C_b$ je súvislá množina, $a \in C_a \cup C_b$ a preto $C_a \cup C_b \subseteq C_a$. Z toho máme $C_b \subseteq C_a$. Podobne sa ukáže, že $C_a \subseteq C_b$.

3) Ak A je súvislá a $C_a \subseteq A$, tak $a \in A$ a z definície C_a dostávame, že $A \subseteq C_a$. □

Definícia 11.2. *Nech X je topologický priestor. Podmnožina A priestoru X sa nazýva komponenta súvislosti priestoru X, ak A je maximálna súvislá podmnožina priestoru X, t. j. A je súvislá a pre každú súvislú podmnožinu B priestoru X, pre ktorú $A \subseteq B$ platí $A = B$.*

Z vety 11.4 dostávame, že ak X je neprázdny topologický priestor, tak pre každú komponentu súvislosti A priestoru X existuje $a \in X$ tak, že $A = C_a$ a teda všetky komponenty súvislosti priestoru X sú uzavreté množiny a tvoria rozklad priestoru X (na komponenty súvislosti).

Príklady 11.2. *1) Priestor X je súvislý práve vtedy, keď pre každé $a \in X$ platí $C_a = X$.*

2) V Sorgenfreyovej priamke S sú komponenty súvislosti jednoprvkové množiny. Nech $a \in \mathbb{R}$, $C = C_a$ je komponenta súvislosti v S obsahujúca a. Množina $[a, a+\varepsilon)$ je pre každé $\varepsilon > 0$ otvorená a súčasne uzavretá v S, preto $A = C \cap [a, a+\varepsilon)$ je otvorená a súčasne uzavretá v podpriestore C. C je súvislý priestor, $A \neq \emptyset$ a preto $A = C \subseteq [a, a+\varepsilon)$. Teda $C = \{a\}$.

3) V priestore $\mathbb{Q}$ (s prirodzenou topológiou) sú komponenty súvislosti jednoprvkové množiny.

4) Ak Y je podpriestor priestoru X, tak pre každé $a \in Y$ platí $C_a^Y \subseteq C_a^X$, kde C_a^Y (C_a^X) je komponenta súvislosti bodu a v priestore Y (X).

5) Podpriestor H priestoru $\mathbb{R}^2$ určený množinou $([0,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,1])\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\{\frac{1}{n}\}\times[0,1]))\}$ je súvislý a nie je lokálne súvislý.

6) Podpriestor $\mathbb{R}^2\backslash A$ priestoru $\mathbb{R}^2$, kde A je spočítateľná podmnožina $\mathbb{R}^2$ je súvislý priestor.

Veta 11.5. *Ak pre každé $\alpha \in I$ je X_α súvislý priestor, tak aj topologický súčin $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ je súvislý priestor.*

Dôkaz. Nech $I \neq \emptyset$ a pre každé $\alpha \in I$ je $X_\alpha \neq \emptyset$. Nech $a \in X$ a C_a je komponenta súvislosti obsahujúca prvok a. Dokážeme, že $C_a = X$.

Nech $\alpha_0 \in I$. Podpriestor $X_a^{(\alpha_0)} = \{b \in X : \text{pre každé } \alpha \in I\backslash\{\alpha_0\}\ p_\alpha(b) = p_\alpha(a)\}$ priestoru X je homeomorfný s priestorom X_{α_0} a preto súvislý. Pretože $a \in X_a^{(\alpha_0)}$, platí $X_a^{(\alpha_0)} \subseteq C_a$. Nech $K = \{b \in X : I_b = \{\alpha \in I : p_\alpha(b) \neq p_\alpha(a)\}$ je konečná$\}$. Ukážeme, že $K \subseteq C_a$ a $\overline{K} = X$. Nech $b \in K$, $b \neq a$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ a $I_b = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq I$ tak, že ak $\alpha \in I_b$, tak $p_\alpha(b) \neq p_\alpha(a)$ a ak $\alpha \in I\backslash I_b$, tak $p_\alpha(b) = p_\alpha(a)$. Ukážeme, že $b \in C_a$, matematickou indukciou vzhľadom na n.

Nech $n = 1$. Potom $I_b = \{\alpha_1\}$ a $b \in X_a^{(\alpha_1)} \subseteq C_a$. Nech výrok platí pre n a $I_b = \{\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}\}$. Nech c je prvok X, pre ktorý $p_\alpha(c) = p_\alpha(b)$ pre všetky $\alpha \neq \alpha_{n+1}$ a $p_{\alpha_{n+1}}(c) = p_{\alpha_{n+1}}(a)$. Potom $I_c = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ a teda $c \in C_a$. Preto pre komponentu súvislosti C_c obsahujúcu prvok c platí $C_c = C_a$. Zrejme $b \in X_c^{(\alpha_{n+1})} = \{d \in X : p_\alpha(d) = p_\alpha(c) \text{ pre všetky } \alpha \neq \alpha_{n+1}\}$, podpriestor $X_c^{(\alpha_{n+1})}$ je homeomorfný s $X_{\alpha_{n+1}}$ a teda súvislý a $c \in X_c^{(\alpha_{n+1}))}$. Preto $X_c^{(\alpha_{n+1})} \subseteq C_c = C_a$ a teda $b \in C_a$. Ukázali sme, že $K \subseteq C_a$.

Ak $V = \bigcap_{\alpha\in F}(p_\alpha)_{-1}[V_\alpha]$, kde F je neprázdna konečná podmnožina I, V_α je otvorená podmnožina X_α je neprázdny prvok štandardnej bázy súčinovej topológie, pre každé $\alpha \in F$ vyberieme prvok $d_\alpha \in V_\alpha$, tak pre prvok $d \in X$, taký, že $p_\alpha(d) = d_\alpha$ pre $\alpha \in F$ a $p_\alpha(d) = p_\alpha(a)$ pre $\alpha \in I\backslash F$ platí $d \in K \cap V$. Teda K je hustá v X. Pretože komponenta súvislosti C_a je uzavretá podmnožina X máme $X = \overline{K} \subseteq C_a$. Dokázali sme, že $C_a = X$ a teda X je súvislý priestor. $\square$

Nasledujúce príklady ukazujú niektoré množnosti využitia súvislosti.

Príklady 11.3. *1) Ukážte, že priestor $[0,1]$ nie je homeomorfný s priestorom $[0,1)$. Nech existuje homeomorfizmus $f : [0,1] \longrightarrow [0,1)$. Potom $f(0) \neq 0$ alebo $f(1) \neq 0$. Nech, napríklad, $f(1) \neq 0$. Potom $g : [0,1) \longrightarrow [0,1)\backslash\{f(1)\}$ dané predpisom $g(x) = f(x)$ pre všetky $x \in [0,1)$ je tiež homeomorfimus, priestor $[0,1)$ je súvislý a priestor $[0,1)\backslash\{f(1)\}$ nie je súvislý. Dostali sme spor. Podobne sa dokáže, že priestor $\mathbb{R}$ nie je homeomorfný s priestorom $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$ pre $n \geq 2$).*

2) Dokážte, že pre každé spojité zobrazenie $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ existuje $c \in [0,1]$ tak, že $f(c) = c$. Nech pre každé $x \in [0,1]$ platí $f(x) \neq x$. Nech $U = \{x \in [0,1] : f(x) < x\}$, $V = \{x \in [0,1] : f(x) > x\}$. Potom $1 \in U$, $0 \in V$ a teda U, V sú neprázdne. Ľahko sa overí, že sú otvorené v $[0,1]$ a je zrejmé, že $U \cup V = [0,1]$ a $U \cap V = \emptyset$. Dostali sme spor.

V nasledujúcej vete uvedieme niektoré vlastnosti lokálne súvislých priestorov.

Veta 11.6. *1) Ak X je lokálne súvislý priestor, tak komponenty súvislosti priestoru X sú otvorené podpriestory priestoru X a priestor X je topologický súčet svojich komponent súvislosti.*

2) Topologický súčet každého systému lokálne súvislých priestorov je lokálne súvislý priestor.

3) Každý otvorený podpriestor lokálne súvislého priestoru je lokálne súvislý priestor.

4) Ak $f: X \longrightarrow Y$ je faktorové zobrazenie a X je lokálne súvislý priestor, tak aj Y je lokálne súvislý priestor.

Dôkaz. 1) - 3) Cvičenie.

4) Nech $b \in Y$ a U je otvorené okolie b v Y. Nech C je komponenta súvislosti podpriestoru U priestoru Y, ktorá obsahuje prvok b. Potom $f_{-1}[U]$ je otvorená podmnožina v X a $f_{-1}[C] \subseteq f_{-1}[U]$. Nech $a \in f_{-1}[C]$. Potom $a \in f_{-1}[U]$ a existuje súvislé okolie V bodu a také, že $V \subseteq f_{-1}[U]$. Množina $f[V]$ je súvislá podmnožina U, $f(a) \in f[V] \cap C$ a preto $f[V] \cup C$ je súvislá podmnožina v U. Pretože C je komponenta súvislosti U platí $f[V] \cup C = C$ a teda $f[V] \subseteq C$. Potom $V \subseteq f_{-1}[C]$ a teda $f_{-1}[C]$ je otvorená podmnožina v X. Pretože f je faktorové zobrazenie, platí, že C je otvorená podmnožina v Y. Teda C je súvislé okolie bodu b, pre ktoré $C \subseteq U$ a preto Y je lokálne súvislý priestor. □

Definícia 11.3. *1) Topologický priestor X sa nazýva lineárne súvislý, ak pre každé $a, b \in X$ existuje spojité zobrazenie $f: [0,1] \longrightarrow X$ také, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$. Takéto zobrazenie sa nazýva cesta z a do b. Podmnožina A priestoru X sa nazýva lineárne súvislá, ak podpriestor priestoru X určený touto množinou je lineárne súvislý priestor.*

2) Topologický priestor sa nazýva lokálne lineárne súvislý, ak pre každé $a \in X$ existuje báza okolí $\mathcal{B}_a$ bodu a taká, že každé okolie patriace do $\mathcal{B}_a$ je lineárne súvislá množina.

Príklady 11.4. *1) Pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{R}^n$ lineárne súvislý aj lokálne lineárne súvislý priestor.*

2) Diskrétny priestor, ktorý má viac ako jeden prvok je lokálne lineárne súvislý a nie je lineárne súvislý.

3) Podpriestor H priestoru $\mathbb{R}^2$ určený množinou $([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{\frac{1}{n}\} \times [0,1])))\}$ je lineárne súvislý a nie je lokálne lineárne súvislý.

Veta 11.7. *Každý lineárne súvislý topologický priestor je súvislý.*

Dôkaz. Nech $a \in X$ a C_a je komponenta súvislosti obsahujúca prvok a. Nech $b \in X$. Potom existuje spojité zobrazenie $f: [0,1] \longrightarrow X$, pre ktoré $f(0) = a$ a $f(1) = b$. Podmnožina $f[[0,1]]$ priestoru X je súvislá, $a \in f[[0,1]]$ a preto $f[[0,1]] \subseteq C_a$. Potom $b \in C_a$ a teda $C_a = X$. □

Nasledujúci príklad ukazuje, že existuje súvislý priestor, ktorý nie je lineárne súvislý.

Príklad 11.1. *Podmnožina* $A = \{(x, \sin\frac{\pi}{x}) : x \in (0,1]\}$ *priestoru* $\mathbb{R}^2$ *(s prirodzenou topológiou) je súvislá, lebo zobrazenie* $h : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dané predpisom* $h(x) = (x, \sin\frac{\pi}{x})$ *je spojité. Pretože* $(0,0) \in \overline{A}$ *v* $\mathbb{R}^2$*, je aj množina* $A \cup \{(0,0)\}$ *súvislá podmnožina v* $\mathbb{R}^2$ *a podpriestor* X *určený touto množinou je súvislý priestor. Ukážeme, že nie je lineárne súvislý. Predpokladajme, že* X *je lineárne súvislý. Potom existuje spojité zobrazenie* $f : [0,1] \longrightarrow X$*, pre ktoré* $f(0) = (0,0)$ *a* $f(1) = (1,0)$*. Zobrazenie* f *je surjektívne, lebo* $f[[0,1]]$ *je súvislý podpriestor priestoru* X *aj* $\mathbb{R}^2$*. Ak by existoval prvok* $c \in (0,1)$ *tak, že* $(c, \sin\frac{\pi}{c}) \notin f[[0,1]]$*, tak zoberieme množiny* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > c\}$ *a* $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < c\}$*, ktoré sú otvorené v* $\mathbb{R}^2$ *a potom pre podmnožiny* $U' = U \cap f[[0,1]]$ *a* $V' = V \cap f[[0,1]]$ *platí, že sú otvorené v priestore* $f[[0,1]]$*, neprázdne, disjunktné,* $U' \cup V' = f[[0,1]]$ *a to je spor. Teda* $f[[0,1]] = X$ *a pretože* $[0,1]$ *je kompaktný priestor, priestor* X *musí byť tiež kompaktný a teda aj uzavretý v* $\mathbb{R}^2$*. Je ale zremé, že napríklad* $(0,1) \in \overline{X}$ *v* $\mathbb{R}^2$*. Dostali sme spor a teda priestor* X *nie je lineárne súvislý.*

Cvičenie 11.1. *Dokážte, že aj podpriestor priestoru* $\mathbb{R}^2$ *určený množinou* $Y = \{(x, \sin\frac{\pi}{x}) : x \in (0,1]\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$ *je súvislý priestor, ktorý nie je lineárne súvislý. Tento priestor je kompaktný.*

Lineárna súvislosť má podobné vlastnosti ako súvislosť.

Veta 11.8. *Ak* $f : X \longrightarrow Y$ *je spojité a surjektívne zobrazenie a priestor* X *je lineárne súvislý, tak aj* Y *je lineárne súvislý priestor.*

Dôkaz. Cvičenie. □

Veta 11.9. *Ak pre každé* $\alpha \in I$ *je topologický priestor* X_α *lineárne súvislý, tak aj topologický súčin* $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ *je lineárne súvislý priestor.*

Dôkaz. Nech $a, b \in X$. Potom pre každé $\alpha \in I$, $p_\alpha(a), p_\alpha(b) \in X_\alpha$ a existuje spojité zobrazenie $f_\alpha : [0,1] \longrightarrow X_\alpha$ také, že $f_\alpha(0) = p_\alpha(a)$ a $f_\alpha(1) = p_\alpha(b)$. Nech $f : [0,1] \longrightarrow X$ je diagonálne zobrazenie určené systémom zobrazení $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$. Potom f je spojité zobrazenie a $f(0) = a$, $f(1) = b$ ($p_\alpha \circ f = f_\alpha$ pre všetky α). □

Veta 11.10. *Nech* X *je neprázdny topologický priestor a* $\sim$ *je relácia na* X *definovaná takto: Ak* $a, b \in X$*, tak* $a \sim b$ *práve vtedy, keď existuje spojité zobrazenie* $f : [0,1] \longrightarrow X$*, pre ktoré* $f(0) = a$ *a* $f(1) = b$*. Potom* $\sim$ *je relácia ekvivalencie na* X *a pre rozklad* $X|_\sim$ *priestoru* X *na triedy ekvivalencie* $\sim$ *platí:*

1) Každá trieda ekvivalencie $L \in X|_\sim$ *je lineárne súvislá podmnožina priestoru* X*.*

2) Ak B *je lineárne súvislá podmnožina priestoru* X*, tak existuje* $L \in X|_\sim$ *tak, že* $B \subseteq L$*.*

3) Ak $L \in X|_\sim$*,* $a \in L$ *a* C_a *je komponenta súvislosti priestoru* X *obsahujúca* a*, tak* $L \subseteq C_a$*.*

Triedy ekvivalencie relácie $\sim$ *sa nazývajú komponenty lineárnej súvislosti priestoru* X*.*

Dôkaz. Zrejme $\sim$ je reflexívna a symetrická. Nech $a \sim b$ a $b \sim c$. Potom existujú spojité zobrazenia $f, g : [0,1] \longrightarrow X$ také, že $f(0) = a$, $f(1) = g(0) = b$ a $g(1) = c$. Definujme zobrazenie $h : [0,1] \longrightarrow X$ tak, že $h(x) = f(2x)$ pre $x \in [0, \frac{1}{2}]$ a $h(x) = g(2x-1)$ pre $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Zobrazenie h je spojité, $h(0) = a$, $h(1) = c$ a teda $a \sim c$.

1) Nech $L \in X|_{\sim}$. Potom existuje $a \in X$ tak, že $L = L_a = \{b \in X : a \sim b\}$. Nech $b, c \in L_a$. Potom $b \sim c$ a teda existuje spojité zobrazenie $f : [0,1] \longrightarrow X$ také, že $f(0) = b$ a $f(1) = c$. Ukážeme, že $f[[0,1]] \subseteq L$. Nech $d \in f[[0,1]] \backslash \{b, c\}$. Potom existuje $r \in (0,1)$, pre ktoré $f(r) = d$. Nech zobrazenie $g : [0,1] \longrightarrow [0,r]$ je definované predpisom $g(t) = r.t$. Potom g je spojité zobrazenie a zobrazenie $h : [0,1] \longrightarrow X$ definované predpisom $h(t) = f(g(t))$ je spojité, $h(0) = b$ a $h(1) = d$. Teda $b \sim d$ a preto $d \in L$. Ukázali sme, že podpriestor L priestoru X je lineárne súvislý priestor.

2) Nech B je lineárne súvislá podmnožina priestoru X, $B \neq \emptyset$ a $a \in B$. Potom pre každé $b \in B$ platí $a \sim b$ a preto $B \subseteq L_a \in X|_{\sim}$.

3) Vyplýva z toho, že L je súvislá podmnožina X. $\square$

Príklad 11.2. *Podpriestor $X = A \cup \{(0,0)\}$, kde $A = \{(x, \sin \frac{\pi}{x}) : x \in (0,1]\}$, priestoru $\mathbb{R}^2$ z príkladu 11.1 nie je lineárne súvislý. Má dve komponenty lineárnej súvislosti a to množinu A, ktorá je lineárne súvislá, lebo je spojitým obrazom lineárne súvislého priestoru $(0,1]$ a jednoprvkovú množinu $\{(0,0)\}$. Množina A nie je uzavretá podmnožina priestoru X, teda komponenty lineárnej súvislosti nemusia byť uzavreté množiny.*

Nakoniec ešte ukážeme, že, napríklad, otvorená podmnožina priestoru $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) je súvislá práve vtedy, keď je lineárne súvislá. Vyplýva to z nasledujúcej vety.

Veta 11.11. *Nech X je lokálne lineárne súvislý topologický priestor. Potom ak otvorená podmnožina U priestoru X je súvislá, tak je aj lineárne súvislá.*

Dôkaz. Nech U je otvorená súvislá podmnožina v X, $a \in U$ a L_a^U je komponenta lineárnej súvislosti podpriestoru U obsahujúca a Ukážeme, že L_a^U je otvorená a súčasne uzavretá v U. Nech $b \in L_a^U$. Potom $b \in U$ a existuje lineárne súvislé okolie bodu b v X také, že $V \subseteq U$. Nech $c \in V$. Podpriestor V priestoru X je lineárne súvislý priestor a preto $b \sim c$ v priestore V. Pretože $V \subseteq U$, platí tiež $b \sim c$ v podpriestore U a preto $a \sim c$ v priestore U. Preto $c \in L_a^U$ a teda $V \subseteq L_a^U$. Ukázali sme že L_a^U je otvorená v X a teda aj v U. Nech $d \in \overline{L_a^U}^U$, kde $\overline{L_a^U}^U$ je uzáver L_a^U v podpriestore U. Nech W je lineárne súvislé okolie bodu d v X také, že $W \subseteq U$. Potom W je okolie d aj v U a preto $W \cap L_a^U \neq \emptyset$. Vyberme $r \in W \cap L_a^U$. Potom $d \sim r$ v podpriestore W priestoru X a preto $d \sim r$ aj v podpriestore U. Potom, pretože $a \sim r$ v U dostávame $a \sim d$ v priestore U a teda $d \in L_a^U$. Teda L_a^U je neprázdna uzavretá a súčasne otvorená podmnožina súvislého priestoru U a preto $L_a^U = U$. Podpriestor U priestoru X je teda lineárne súvislý priestor. $\square$

Z príkladu 11.1 vyplýva, že existujú podmnožiny priestoru $\mathbb{R}^2$, ktoré sú súvislé a nie sú lineárne súvislé a z cvičenia 11.1 vyplýva, že existujú uzavreté podmnožiny v $\mathbb{R}^2$, ktoré sú súvislé a nie sú lineárne súvislé.

12 Metrizovateľné priestory

V predchádzajúcich častiach sme definovali pojem metrizovateľného priestoru (definícia 2.2) a ukázali niektoré vlastnosti metrizovateľných priestorov, napríklad, že každý metrizovateľný priestor spĺňa 1. axiómu spočítateľnosti, každý podpriestor metrizovateľného priestoru je metrizovateľný priestor (cvičenie 3.1.1)), súčin spočítateľného systému metrizovateľných priestorov je metrizovateľný priestor (veta 6.6) a niektoré ďalšie vlastnosti (veta 2.9.2), veta 8.1.5)). V tejto časti sa budeme zaoberať topologickou charakterizáciou metrizovateľných priestorov.

Pripomeňme, že ak (X, d) je metrický priestor, $c \in X$ a $B \subseteq X$ tak vzdialenosť $d(c, B)$ bodu c od množiny B je definovaná takto: $d(c, B) = \inf\{d(c, x) : x \in B\}$ ak $B \neq \emptyset$ a $d(c, \emptyset) = \infty$. Ak B, C sú podmnožiny X, tak vzdialenosť $d(B, C)$ medzi množinami B, C je definovaná tak, že $d(B, C) = \inf\{d(x, y) : x \in B, y \in C\}$ ak B, C sú neprázdne a $d(B, C) = \infty$ ak niektorá z množín je prázdna.

Nasledujúca Urysohnova metrizačná veta charakterizuje metrizovateľnosť pre priestory so spočítateľnou bázou.

Veta 12.1. *(Urysohn) Nech X je topologický priestor so spočítateľnou bázou. Potom X je metrizovateľný práve vtedy, keď X je T_3-priestor.*

Dôkaz. Nech X je metrizovateľný, topológia priestoru X je určená metrikou d, $c \in X$ a $\mathcal{B}_c = \{O^d_\varepsilon(c) : \varepsilon > 0\}$. Potom $\mathcal{B}_c$ je báza okolí bodu c v X a pre každé $O^d_\varepsilon(c) \in \mathcal{B}_c$ existuje $O^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(c) \in \mathcal{B}_c$ tak, že $\overline{O^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(c)} \subseteq O^d_\varepsilon(c)$. Podľa vety 5.5.2) je potom X regulárny a pretože je tiež T_2-priestorom, je to T_3-priestor.

Nech X je T_3-priestor. Pretože X má spočítateľnú bázu, je to normálny priestor (veta 5.9). Nech $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza topológie priestoru X. Potom množina $\mathbb{C} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \overline{U} \subseteq V\}$ je tiež spočítateľná. Pre každé $(U, V) \in \mathbb{C}$ sú množiny $\overline{U}$ a $X \setminus V$ uzavreté disjunktné podmnožiny X a pretože X je normálny, podľa Urysohnovej lemy existuje spojité zobrazenie $f_{(U,V)} : X \longrightarrow [0, 1]$ také, že $f[\overline{U}] \subseteq \{0\}$ a $f[X \setminus V] \subseteq \{1\}$. Diagonálne zobrazenie $f : X \longrightarrow [0, 1]^{\mathbb{C}}$ určené systémom zobrazení $(f_{(U,V)})_{(U,V)\in\mathbb{C}}$ je spojité zobrazenie (pozri vetu 6.7). Ukážeme, že je to vloženie. Nech B je uzavretá podmnožina v X a $c \notin B$. Potom existuje $V \in \mathcal{B}$ tak, že $c \in V \subseteq X \setminus B$. Pretože X je regulárny existuje $U \in \mathcal{B}$, pre ktoré $c \in U$ a $\overline{U} \subseteq V$ (veta 5.4.1)). Potom $(U, V) \in \mathbb{C}$ a pre zobrazenie $f_{(U,V)}$ platí $f_{(U,V)}(c) = 0$ a $f_{(U,V)}[B] \subseteq \{1\}$ (lebo $B \subseteq X \setminus V$). Potom, zrejme, $c \notin \overline{f_{(U,V)}[B]}$ a teda systém $(f_{(U,V)})_{(U,V)\in\mathbb{C}}$ spĺňa podmienku z vety 6.9 a to, spolu s tým, že X je T_0-priestor stačí k tomu, aby f bolo vloženie. Teda priestor X je homeomorfný s podpriestorom $f[X]$ priestoru $[0, 1]^{\mathbb{C}}$, ktorý je metrizovateľný a preto je aj X metrizovateľný priestor. $\square$

Pre všeobecnú charakterizáciu metrizovateľnosti topologických priestorov budeme potrebovať nasledujúce vlastnosti metrizovateľných priestorov a pojmy.

Veta 12.2. *Ak (X,d) je metrický priestor, tak zobrazenie $d: (X,\mathcal{T}_d)\times(X,\mathcal{T}_d) \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojité.*

Dôkaz. Nech $(a,b),(x,y) \in X\times X$. Potom $d(a,b) \le d(a,x)+d(x,b) \le d(a,x)+d(x,y)+d(y,b)$ a preto $d(a,b)-d(x,y) \le d(a,x)+d(y,b)$. Podobne sa ukáže, že $d(x,y)-d(a,b) \le d(x,a)+d(b,y)$. Z toho dostávame, že $|d(a,b)-d(x,y)| \le d(a,x)+d(b,y)$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje okolie $O^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)\times O^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$ bodu (a,b) v $(X,\mathcal{T}_d)\times(X,\mathcal{T}_d)$ také, že ak $(x,y) \in O^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)\times O^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$, tak $|d(a,b)-d(x,y)| \le d(a,x)+d(b,y) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Definícia 12.1. *Nech X je množina. Zobrazenie $\varrho: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva pseudometrika na X, ak pre každé $x,y,z \in X$ platí:*
1) $\varrho(x,y) \ge 0$.
2) $\varrho(x,x) = 0$.
3) $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$.
4) $\varrho(x,z) \le \varrho(x,y)+\varrho(y,z)$.

Je zrejmé, že každá metrika je pseudometrika. Ak X je množina, ktorá má viac ako jeden prvok, tak zobrazenie $\varrho: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$, definované predpisom $\varrho(x,y) = 0$ pre všetky $(x,y) \in X\times X$, je pseudometrika a nie je to metrika na X.

Ak ϱ je pseudometrika na množine X, $A \subseteq X$ $c \in X$, tak vzdialenosť $\varrho(c,A)$ bodu c od A je definovaná, podobne ako pre metriku, takto: $\varrho(c,A) = \inf\{\varrho(c,x) : x \in A\}$ ak $A \ne \emptyset$, $\varrho(c,\emptyset) = \infty$.

Veta 12.3. *Nech $(X,\mathcal{T})$ je topologický priestor, ϱ je pseudometrika na množine X a $\varrho: (X,\mathcal{T})\times(X,\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie. Potom pre každú neprázdnu podmnožinu A, množiny X je zobrazenie $f_A: (X,\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definované predpisom $f_A(x) = \varrho(x,A)$ pre všetky $x \in X$ spojité.*

Dôkaz. Nech A je neprázdna podmnožina X, $x,y \in X$. Potom pre každé $a \in A$ platí: $\varrho(x,A) \le \varrho(x,a) \le \varrho(x,y)+\varrho(y,a)$ a preto $\varrho(x,A)-\varrho(x,y) \le \varrho(y,a)$. Potom $\varrho(x,A)-\varrho(x,y) \le \varrho(y,A)$ a teda $\varrho(x,A)-\varrho(y,A) \le \varrho(x,y)$. Zrejme aj $\varrho(y,A)-\varrho(x,A) \le \varrho(y,x) = \varrho(x,y)$ a teda $|\varrho(x,A)-\varrho(y,A)| \le \varrho(x,y)$.

Nech $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Potom $(x,x) \in X\times X$ a pretože ϱ je spojité zobrazenie existuje prvok $U\times V$ štandardnej bázy súčinovej topológie ($U,V \in \mathcal{T}$) taký, že $(x,x) \in U\times V$ a pre každé $(y,z) \in U\times V$ platí $|\varrho(x,x)-\varrho(y,z)| < \varepsilon$. Potom U je okolie x v $(X,\mathcal{T})$ a pre každé $y \in U$ je $(y,x) \in U\times V$ a preto $|f_A(x)-f_A(y)| \le \varrho(x,y) = |\varrho(x,x)-\varrho(y,x)| < \varepsilon$. Teda f_A je spojité zobrazenie. □

Z viet 12.2 a 12.3 dostávame:

Dôsledok 12.1. *1) Ak (X,d) je metrický priestor a A je neprázdna podmnožina množiny X, tak zobrazenie $f_A: (X,\mathcal{T}_d) \longrightarrow \mathbb{R}$ definované predpisom $f_A(x) = d(x,A)$ pre všetky $x \in X$ je spojité zobrazenie.*

2) Ak (X, d) je metrický priestor, A je podmnožina množiny X a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tak množina $A_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$ je otvorená podmnožina v $(X, \mathcal{T}_d)$.

3) Ak (X, d) je metrický priestor, tak priestor $(X, \mathcal{T}_d)$ je normálny.

Dôkaz. 1) Zrejmý.

2) Ak $A = \emptyset$, tak aj $A_\varepsilon = \emptyset$. Ak $A \neq \emptyset$, tak $A_\varepsilon = (f_A)_{-1}[(-\infty, \varepsilon)]$, a zo spojitosti f_A vyplýva, že je to otvorená množina v $(X, \mathcal{T}_d)$.

3) Nech A, B sú uzavreté disjunktné podmnožiny v $(X, \mathcal{T}_d)$. Ak jedna z nich, napríklad A je prázdna, tak konštantné zobrazenie $f : (X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow [0, 1]$, ktoré všetky prvky X zobrazí na 1 je spojité zobrazenie, pre ktoré $f[A] \subseteq \{0\}$ a $f[B] \subseteq \{1\}$. Nech A aj B sú neprázdne. Potom zobrazenia $f_A : (X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_A(x) = d(x, A)$, $f_B : (X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_B(x) = d(x, B)$ sú spojité a preto je aj zobrazenie $f : (X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow [0, 1]$ definované predpisom $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)}$ spojité (pre každé $x \in X$ je $f_A(x) + f_B(x) > 0$) a je zrejmé, že $f[A] \subseteq \{0\}$ a $f[B] \subseteq \{1\}$. Preto je priestor $(X, \mathcal{T}_d)$ normálny. □

Definícia 12.2. *Nech X je topologický priestor a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

1) Systém $\mathcal{S}$ sa nazýva lokálne konečný (diskrétny) v X ak pre každé $a \in X$ existuje okolie $U(a)$ bodu a tak, že množina $\{V \in \mathcal{S} : V \cap U(a) \neq \emptyset\}$ je konečná (má najviac jeden prvok).

2) Systém $\mathcal{S}$ sa nazýva σ-lokálne konečný (σ-diskrétny) ak je zjednotením spočítateľného systému lokálne konečných (diskrétnych) systémov.

3) Nech $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ sú pokrytia priestoru X. Pokrytie $\mathcal{U}$ sa nazýva zjemnením pokrytia $\mathcal{V}$ (píšeme $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$), ak pre každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{V}$ také, že $U \subseteq V$.

Príklady 12.1. *1) Každý diskrétny systém je lokálne konečný.*

2) Každý konečný systém je lokálne konečný.

3) Systém otvorených intervalov $\mathcal{S} = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ je lokálne konečný a nie je diskrétny v priestore $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$. Tento systém je diskrétny v Sorgenfreyovej priamke S.

4) Ak (X, d) je metrický priestor a $\mathcal{S}$ je systém podmnožín priestoru (X, d) taký, že existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tak, že pre každé $A, B \in \mathcal{S}$ je $d(A, B) \geq r$, tak $\mathcal{S}$ je diskrétny systém v priestore $(X, \mathcal{T}_d)$.

5) Zjednotenie spočítateľného systému σ-lokálne konečných (σ-diskrétnych) systémov v priestore X je σ-lokálne konečný (σ-diskrétny) systém.

6) Ak $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{S}' = \{X\}$, tak $\mathcal{S} \prec \mathcal{S}'$ aj $\mathcal{S}' \prec \mathcal{S}$.

Veta 12.4. *Ak $\mathcal{S}$ je lokálne konečný systém podmnožín topologického priestoru X, tak platí:*

1) $\bigcup_{A\in\mathcal{S}} \overline{A} = \overline{\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A}$.

2) Ak všetky $A \in \mathcal{S}$ sú uzavreté v X, tak $\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A$ je uzavretá podmnožina priestoru X.

Dôkaz. 1) Pre každé $B \in \mathcal{S}$ platí $\overline{B} \subseteq \overline{\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A}$ a preto $\bigcup_{A\in\mathcal{S}} \overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A}$. Nech $c \in \overline{\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A}$. Pretože $\mathcal{S}$ je lokálne konečný existuje okolie $U(c)$ bodu c v X také, že $\mathcal{S}' = \{A \in \mathcal{S} : A \cap U(c) \neq \emptyset\}$ je konečná množina. Zrejme

$c \in (\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{S}'} A}) \cup (\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}'} A}$, $U(c) \cap (\bigcup_{A\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}'} A) = \emptyset$ a preto $c \notin \overline{\bigcup_{A\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}'} A}$. Teda $c \in \overline{\bigcup_{A\in\mathcal{S}'} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{S}'} \overline{A}$. Preto existuje $A \in \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ tak, že $c \in \overline{A}$. T toho vyplýva, že $\bigcup_{A\in\mathcal{S}} \overline{A} \supseteq \overline{\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A}$.

2) Vyplýva z 1). □

V nasledujúcich dvoch vetách dokážeme nutné podmienky pre metrizovateľnosť topologických priestorov. V prvej z nich použijeme Zermelovu vetu, v ktorej sa hovorí, že pre každú množinu existuje dobré usporiadanie tejto množiny.

Veta 12.5. *Ak (X, d) je metrický priestor, tak pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru $(X, \mathcal{T}_d)$ existuje otvorené σ-diskrétne pokrytie $\mathcal{V}$ priestoru $(X, \mathcal{T}_d)$, ktoré je zjemnením pokrytia $\mathcal{U}$ (t. j. $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$).*

Dôkaz. Nech $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie priestoru $(X, \mathcal{T}_d)$. Podľa Zermelovej vety existuje dobré usporiadanie $\leq$ množiny $\mathcal{U}$ (t. j. $(\mathcal{U}, \leq)$ je dobre usporiadaná množina). Pre každé $U \in \mathcal{U}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ definujme $U_n = \{x \in U : d(x, X\setminus U) \geq \frac{1}{2^n}\}$. Je zrejmé, že $U_1 \subseteq U_2 \subseteq ... \subseteq U_n \subseteq ... \subseteq U$.

Nech $x \in U_n$, $y \in X\setminus U_{n+1}$. Potom $d(x, X\setminus U) \geq \frac{1}{2^n}$, $d(y, X\setminus U) < \frac{1}{2^{n+1}}$ a teda $-\frac{1}{2^{n+1}} < -d(y, X\setminus U)$. Nech $z \in X\setminus U$. Potom $d(x, X\setminus U) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ a teda pre každé $z \in X\setminus U$ platí $d(x, X\setminus U) - d(x, y) \leq d(y, z)$. Z toho dostávame, že $d(x, X\setminus U) \leq d(x, y) + d(y, X\setminus U)$. Potom $d(x, y) \geq d(x, X\setminus U) - d(y, X\setminus U) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Teda pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $d(U_n, X\setminus U_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Pre každé $U \in \mathcal{U}$ a $n \in N$ položme $U'_n = U_n \setminus \bigcup\{V_{n+1} : V \in \mathcal{U}, V < U\}$ (tu sme použili dobré usporiadanie systému $\mathcal{U}$). Je zrejmé, že $U'_n \subseteq U_n$. Ak $V < U$, tak $U'_n \subseteq X\setminus V_{n+1}$ a pretože $V'_n \subseteq V_n$, platí $d(V'_n, U'_n) \geq d(V_n, X\setminus V_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$. Pre každé $U, V \in \mathcal{U}$, $U \neq V$ platí $U < V$ alebo $V < U$ a teda $d(U'_n, V'_n) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Nech teraz pre každé $U \in \mathcal{U}$ a $n \in N$, $U^\star_n = \{x \in X : d(x, U'_n) < \frac{1}{2^{n+3}}\}$. Podľa dôsledku 12.1.2) je $U^\star_n$ otvorená množina. Ukážeme, že ak $U \neq V$, tak $d(U^\star_n, V^\star_n) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$. Nech $x \in U^\star_n$, $y \in V^\star_n$. Potom existujú $x' \in U'_n$, $y' \in V'_n$ tak, že $d(x, x') < \frac{1}{2^{n+3}}$ a $d(y, y') < \frac{1}{2^{n+3}}$. $d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y')$, $\frac{1}{2^{n+1}} \leq d(U'_n, V'_n) \leq d(x', y')$, preto $d(x, y) \geq d(x', y') - d(x, x') - d(y, y') > \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+3}} - \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+2}}$. Teda $d(U^\star_n, V^\star_n) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$.

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{V}_n = \{U^\star_n : U \in \mathcal{U}\}$. Potom $\mathcal{V}_n$ je diskrétny systém otvorených podmnožín v $(X, \mathcal{T}_d)$, lebo pre každé $x \in X$ existuje okolie $O^d_{\frac{1}{2^{n+3}}}(x)$ také, že množina $\{U^\star_n \in \mathcal{V}_n : U^\star_n \cap O^d_{\frac{1}{2^{n+3}}}(x) \neq \emptyset\}$ má najviac jeden prvok (pre každé $a, b \in O^d_{\frac{1}{2^{n+3}}}(x)$ platí $d(a, b) < \frac{1}{2^{n+2}}$ a pre $U \neq V$ platí $d(U^\star_n, V^\star_n) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$).

Nech teraz $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$. Potom $\mathcal{V}$ je σ-diskrétny systém otvorených podmnožín v $(X, \mathcal{T}_d)$. Ukážeme, že $\mathcal{V}$ je pokrytie $(X, \mathcal{T}_d)$. Nech $x \in X$ a U je najmenší prvok v $(\mathcal{U}, \leq)$, pre ktorý $x \in U$. Nech $n \in \mathbb{N}$ také, že $d(x, X\setminus U) \geq \frac{1}{2^n}$ a teda $x \in U_n$. Ak $V \in \mathcal{U}$ a $V < U$, tak $x \notin V$, preto $x \notin V_{n+1}$ a teda $x \in U'_n \subseteq U^\star_n \in \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}$.

Zostáva ešte ukázať, že $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$. Nech $W \in \mathcal{V}$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $W \in \mathcal{V}_n$ a teda existuje $U \in \mathcal{U}$, pre ktoré $W = U^\star_n$. Nech $x \in U^\star_n$. Potom existuje $y \in U'_n \subseteq U_n$ tak, že $d(x, y) < \frac{1}{2^{n+3}}$. Pretože $y \in U_n$, platí $d(y, X\setminus U) \geq \frac{1}{2^n}$. Nech

$z \in X \backslash U$ Potom $d(y,z) \geq \frac{1}{2^n}$ a $d(x,z) \geq d(y,z) - d(y,x) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+3}} > \frac{1}{2^{n+1}}$. Teda $d(x, X\backslash U) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ a preto $x \in U$. Platí teda $U_n^\star \subseteq U$ a preto $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$. $\square$

Veta 12.6. *Ak (X,d) je metrický priestor, tak priestor $(X,\mathcal{T}_d)$ má σ-diskrétnu bázu topológie.*

Dôkaz. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{U}_n = \{O^d_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$ otvorené pokrytie priestoru $(X,\mathcal{T}_d)$ a podľa predchádzajúcej vety existuje σ-diskrétne otvorené pokrytie $\mathcal{B}_n$ priestoru $(X,\mathcal{T}_d)$, ktoré je zjemnením U_n ($\mathcal{B}_n \prec \mathcal{U}_n$). Nech $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Potom $\mathcal{B}$ je σ-diskrétny systém otvorených podmnožín priestoru $(X,\mathcal{T}_d)$. Ukážeme, že $\mathcal{B}$ je báza topológie $\mathcal{T}_d$. Nech $U \in \mathcal{T}_d$ a $x \in U$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $O^d_{\frac{2}{n}}(x) \subseteq U$. $\mathcal{B}_n$ je pokrytie X, preto existuje $V \in \mathcal{B}_n$ tak, že $x \in V$. Pretože $\mathcal{B}_n \prec \mathcal{U}_n$, existuje $O^d_{\frac{1}{n}}(y) \in \mathcal{U}_n$, pre ktoré $V \subseteq O^d_{\frac{1}{n}}(y)$ a z toho, že $x \in V \subseteq O^d_{\frac{1}{n}}(y)$ dostávame, že $d(x,y) < \frac{1}{n}$. Nech $z \in V$. Potom $z \in O^d_{\frac{1}{n}}(y)$ a preto $d(z,y) < \frac{1}{n}$. Potom $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$. Teda $V \subseteq O^d_{\frac{2}{n}}(x) \subseteq U$, $x \in V$ a $V \in \mathcal{B}$. Dokázali sme, že $\mathcal{B}$ je báza topológie $\mathcal{T}_d$. $\square$

Dôsledok 12.2. *Každý metrizovateľný topologický priestor má σ-lokálne konečnú bázu topológie.*

Na základe doterajších poznatkov vieme, že každý metrizovateľný priestor je T_3- priestor a má σ-lokálne konečnú (σ-diskrétnu) bázu. Ukážeme, že tieto podmnienky sú aj postačujúce k tomu, aby topologický priestor bol metrizovateľný.

Lema 12.1. *Ak X je T_3-priestor, ktorý má σ-lokálne konečnú bázu topológie, tak X je normálny priestor.*

Dôkaz. Nech A, B sú uzavreté podmnožiny priestoru X, $A \cap B = \emptyset$ a $\mathcal{B}$ je σ-lokálne konečná báza priestoru X. Potom $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in N} \mathcal{B}_n$, kde všetky $\mathcal{B}_n$ sú lokálne konečné systémy v X. Pre každé $a \in A$ existuje $V(a) \in \mathcal{B}$ tak, že $a \in V(a) \subseteq X\backslash B$ a pretože X je regulárny, existuje $U(a) \in \mathcal{B}$ tak, že $a \in U(a)$ a $\overline{U(a)} \subseteq V(a) \subseteq X\backslash B$. $U(a)$ je otvorené okolie bodu a . Nech $\mathcal{S} = \{U(a) : a \in A\}$. Je zrejmé, že $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U(a)$. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{S}_n = \{U(a) \in \mathcal{S} : U(a) \in \mathcal{B}_n\}$ a $U_n = \bigcup_{U(a)\in\mathcal{S}_n} U(a)$. Potom všetky U_n sú otvorené množiny v X, $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $\mathcal{S}_n$ je lokálne konečný (lebo $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{B}_n$) a preto $\overline{U_n} = \bigcup_{U(a)\in\mathcal{S}_n} \overline{U(a)} \subseteq X\backslash B$. Teda $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\overline{U_n} \cap B = \emptyset$. Podobne sa ukáže, že existuje systém $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ otvorených podmnožín priestoru X taký, že $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\overline{V_n} \cap A = \emptyset$. Nech teraz pre každé $n \in \mathbb{N}$, $U_n^\star = U_n \backslash \bigcup_{k\leq n} \overline{V_k}$, $V_n^\star = V_n \backslash \bigcup_{k\leq n} \overline{U_k}$. Potom $U_n^\star$, $V_n^\star$ sú otvorené podmnožiny v X, $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^\star$, $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n^\star$, $U_n^\star \subseteq U_n$, $V_n^\star \subseteq V_n$ a pre každé $n,k \in \mathbb{N}$ platí $U_n^\star \cap \mathcal{V}_n^\star = \emptyset$. Skutočne, ak $n \leq k$, tak $V_k^\star \cap \overline{U_n} = \emptyset$ a preto $V_k^\star \cap U_n^\star = \emptyset$, ak $k \leq n$, tak $U_n^\star \cap \overline{V_k} = \emptyset$ a preto $U_n^\star \cap V_n^\star = \emptyset$. Potom $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^\star$ a $V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k^\star$ sú otvorené disjunkté podmnožiny priestoru X a $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Teda X je normálny priestor. $\square$

Lema 12.2. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je T_0-priestor a $(\varrho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je spočítateľný systém pseudometrík na X, pre ktorý platí:*

(1) Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a všetky $x, y \in X$ je $\varrho_k(x, y) \leq 1$.

(2) Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je $\varrho_k : (X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$ spojité zobrazenie.

(3) Pre každú uzavretú podmnožinu A priestoru $(X, \mathcal{T})$ a každé $c \in X \backslash A$ existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $\varrho_k(c, A) > 0$.

Potom zobrazenie $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definované predpisom $d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varrho_k(x, y)$ je metrika na X a $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

Dôkaz. Nech $x, y, z \in X$. Je zrejmé, že $d(x, x) = 0$ a $d(x, y) = d(y, x)$. Platí tiež $d(x, y) + d(y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varrho_k(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varrho_k(y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(\varrho_k(x, y) + \varrho_k(y, z)) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varrho_k(x, z) = d(x, z)$. Nech $x \neq y$. Potom existuje otvorená množina U v $(X, \mathcal{T})$ tak, že $x \in U$ a $y \notin U$ alebo existuje otvorená množina V, pre ktorú $x \notin V$ a $y \in V$. Predpokladajme, že platí prvá možnosť. Potom $x \notin X\backslash U$, $X\backslash U$ je uzavretá podmnožina priestoru $(X, \mathcal{T})$ a preto podľa (3) existuje k tak, že $\varrho_k(x, X\backslash U) = r > 0$. Pretože $y \in X\backslash U$, máme $d(x, y) \geq \frac{1}{2^k} \varrho_k(x, y) \geq \frac{1}{2^k} \varrho_k(x, X\backslash U) = \frac{r}{2^k} > 0$. Teda d je metrika na X.

Ukážeme, že $d : (X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie. Nech $(a, b) \in X \times X$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n \in N$ tak, že $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pre všetky $k \in \{1, ..., n\}$ je ϱ_k spojité zobrazenie a preto existuje okolie W_k bodu (a, b) v $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$ také, že ak $(x, y) \in W_k$, tak $|\varrho_k(x, y) - \varrho_k(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nech $W = \bigcap_{k=1}^{n} W_k$. Potom W je oklie bodu (a, b) a ak $(x, y) \in W$, tak $d(x, y) - d(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(\varrho_k(x, y) - \varrho_(a, b)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\varrho_k(x, y) - \varrho_k(a, b)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} |\varrho_k(x, y) - \varrho_k(a, b)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\varrho_k(x, y) - \varrho_k(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}(\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Podobne sa ukáže, že $d(a, b) - d(x, y) < \varepsilon$ a preto $|d(x, y) - d(a, b)| < \varepsilon$.

Teraz ukážeme, že systém všetkých uzavretých podmnožín priestoru $(X, \mathcal{T})$ je totožný so systémom všetkých uzavretých podmnožín priestoru $(X, \mathcal{T}_d)$ a teda platí $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Nech A je uzavretá podmnožina v $(X, \mathcal{T})$, $A \neq \emptyset$ a $c \notin A$. Potom existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\varrho_k(c, A) = r > 0$. Preto pre všetky $a \in A$ platí $d(c, a) \geq \frac{1}{2^k} \varrho_k(c, a) \geq \frac{1}{2^k} \varrho_k(c, A) = \frac{r}{2^k} > 0$. Teda pre okolie $O^d_{\frac{r}{2^k}}(c)$ bodu c v $(X, \mathcal{T}_d)$ platí $O^d_{\frac{r}{2^k}}(c) \cap A = \emptyset$ a preto A je uzavretá v priestore $(X, \mathcal{T}_d)$.

Nech teraz A je neprázdna uzavretá podmnožina priestoru $(X, \mathcal{T}_d)$. Potom, pretože $d : (X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie, zobrazenie $f_A : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definované $f_A(x) = d(x, A)$ je spojité (veta 12.3). Pretože A je uzavretá v $(X, \mathcal{T}_d)$, platí $A = \{x \in X : d(x, A) = 0\} = (f_A)_{-1}[\{0\}]$. Množina $(f_A)_{-1}[\{0\}]$ je uzavretá podmnožina v $(X, \mathcal{T})$ a preto aj A je uzavretá v $(X, \mathcal{T})$.

Dokázali sme, že $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

□

Lema 12.3. *Ak X je T_3-priestor, ktorý má σ-lokálne konečnú bázu topológie, tak X je metrizovateľný priestor.*

Dôkaz. Ukážeme, že existuje spočítateľný systém pseudometrík na X, ktorý spĺňa podmienky z lemy 12.2. Podľa lemy 12.1 je X normálny priestor.

Nech $\mathcal{B}$ je σ-lokálne konečná báza topológie priestoru X. Potom $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, kde všetky $\mathcal{B}_n$ sú lokálne konečné systémy podmnožín priestoru X.

Nech $(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $U \in \mathcal{B}_i$. Nech $\mathcal{S}_{k,U} = \{V \in \mathcal{B}_k : \overline{V} \subseteq U\}$ a $V_U = \bigcup_{V\in\mathcal{S}_{k,U}} V$. Pretože $\mathcal{S}_{k,U} \subseteq \mathcal{B}_k$, $\mathcal{S}_{k,U}$ je lokálne konečný systém a preto $\overline{V_U} = \bigcup_{V\in\mathcal{S}_{k,U}} \overline{V} \subseteq U$. Priestor X je normálny, $\overline{V_U} \cap (X\backslash U) = \emptyset$, množiny $\overline{V_U}$, $X\backslash U$ sú uzavreté v X, preto existuje spojité zobrazenie $f_U : X \longrightarrow [0,1]$ také, že $f_U[X\backslash U] \subseteq \{0\}$ a $f_U[\overline{V_U}] \subseteq \{1\}$. Pretože $\mathcal{B}_i$ je lokálne konečný systém, pre každé $x \in X$ existuje okolie $U_i(x)$ také, že $\mathcal{B}_i(x) = \{U \in \mathcal{B}_i : U \cap U_i(x) \neq \emptyset\}$ je konečná množina. Je zrejmé, že systém $\{U_i(x) \times U_i(y) : (x,y) \in X \times X\}$ je otvorené pokrytie priestoru $X \times X$.

Pre každé $(x,y) \in X \times X$ definujme zobrazenie $g_{x,y} : U_i(x) \times U_i(y) \longrightarrow \mathbb{R}$ predpisom $g_{x,y}(u,v) = \sum_{U\in\mathcal{B}_i} |f_U(u) - f_U(v)|$. Ak $U \notin \mathcal{B}_i(x) \cup \mathcal{B}_i(y)$, tak $U \cap U_i(x) = \emptyset$, $U \cap U_i(y) = \emptyset$ a to znamená, že $U_i(x) \subseteq X\backslash U$, $U_i(y) \subseteq X\backslash U$, preto $f_U[U_i(x)] = \{0\}$, $f_U[U_i(y)] = \{0\}$ a teda $f_U(u) = f_U(v) = 0$. Preto $|f_U(u) - f_U(v)| = 0$. Teda ak $\mathcal{B}_i(x) \cup \mathcal{B}_i(y) = \emptyset$, tak $g_{x,y} = 0$ pre všetky $(u,v) \in U_i(x) \times U_i(y)$ a ak $\mathcal{B}_i(x) \cup \mathcal{B}_i(y) \neq \emptyset$, tak $g_{x,y}(u,v) = \sum_{U\in\mathcal{B}_i(x)\cup\mathcal{B}_i(y)} |f_U(u) - f_U(v)|$, pričom $\mathcal{B}_i(x) \cup \mathcal{B}_i(y)$ je konečná množina. Preto $g_{x,y}$ je spojité zobrazenie.

Definujme zobrazenie $g_{i,k} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ predpisom $g_{i,k}(x,y) = g_{x,y}(x,y)$. Ukážeme, že pre každé $(x,y) \in X \times X$ platí $g_{i,k}|_{U_i(x)\times U_i(y)} = g_{x,y}$. Nech $(u,v) \in U_i(x) \times U_i(y)$. Potom (u,v) zrejme patrí aj do $U_i(u) \times U_i(v)$ a preto $g_{i,k}(u,v) = g_{u,v}(u,v) = \sum_{U\in\mathcal{B}_i} |f_U(u) - f_U(v)| = g_{x,y}(u,v)$. Potom ale pre všetky $(x,y) \in X \times X$ je zobrazenie $g_{i,k}$ spojité na $U_i(x) \times U_i(y)$ a preto je spojité aj na $X \times X$ (systém $\{U_i(x) \times U_i(y) : (x,y) \in X \times X\}$ je otvorené pokrytie priestoru $X \times X$).

Ľahko sa overí, že $g_{i,k}$ je pseudometrika na X. Zrejme $g_{i,k}(x,y) \geq 0$, $g_{i,k}(x,x) = 0$, $g_{i,k}(x,y) = g_{i,k}(y,x)$ pre všetky $x,y \in X$. Nech $x,y,z \in X$. Potom $g_{i,k}(x,y) + g_{i,k}(y,z) = \sum_{U\in\mathcal{B}_i} |f_U(x) - f_U(y)| + \sum_{U\in\mathcal{B}_i} |f_U(y) - f_U(z)| =$
$= \sum_{U\in(\mathcal{B}_i(x)\cup\mathcal{B}_i(y)\cup\mathcal{B}_i(z))} |f_U(x) - f_U(y)| + \sum_{U\in(\mathcal{B}_i(x)\cup\mathcal{B}_i(y)\cup\mathcal{B}_i(z))} |f_U(y) - f_U(z)| =$
$= \sum_{U\in(\mathcal{B}_i(x)\cup\mathcal{B}_i(y)\cup\mathcal{B}_i(z))} (|f_U(x) - f_U(y)| + |f_U(y) - f_U(z)|) \geq$
$\geq \sum_{U\in(\mathcal{B}_i(x)\cup\mathcal{B}_i(y)\cup\mathcal{B}_i(z))} |f_U(x) - f_U(z)| = \sum_{U\in\mathcal{B}_i} |f_U(x) - f_U(z)| = g_{i,k}(x,z)$.

Teraz definujme $\varrho_{i,k} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ predpisom $\varrho_{i,k}(x,y) = \min\{1, g_{i,k}(x,y)\}$. Potom $\varrho_{i,k}$ je pseudometrika na X, pre všetky $(x,y) \in X \times X$ platí $\varrho_{i,k}(x,y) \leq 1$ a $\varrho_{i,k} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie.

Teda máme spočítateľný systém $(\varrho_{i,k})_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ pseudometrík na X, ktorý spĺňa podmienky (1) a (2) lemy 12.2. Overíme, že platí aj podmienka (3) lemy 12.2.

Nech A je uzavretá podmnožina priestoru X, $A \neq \emptyset$ a $c \in X\backslash A$. Potom existuje $U_c \in \mathcal{B}$ tak, že $c \in U_c \subseteq X\backslash A$. Zrejme existuje $i \in \mathbb{N}$ také, že $U_c \in \mathcal{B}_i$. Pretože X je regulárny priestor, existuje $V \in \mathcal{B}$, pre ktoré platí $c \in V$ a $\overline{V} \subseteq U_c$. Nech $V \in \mathcal{B}_k$. Potom $c \in V_{U_c} \subseteq \overline{V_{U_c}}$ (množina V_{U_c} je definovaná rovnako, ako množina V_U zo začiatku dôkazu). Pre zobrazenie f_{U_c} (definované rovnako ako zobrazenie f_U na začiatku dôkazu) platí $f_{U_c}[\overline{V_{U_c}}] = \{1\}$a teda $f_{U_c}(c) = 1$. Pretože $f_{U_c}[X\backslash U_c] = \{0\}$, pre každé $a \in A \subseteq X\backslash U_c$ platí $f_{U_c}(a) = 0$. Potom pre všetky $a \in A$ platí $g_{i,k}(c,a) = \sum_{U\in\mathcal{B}_i} |f_U(c) - f_U(a)| \geq |f_{U_c}(c) - f_{U_c}(a)| = 1$. Teda pre všetky $a \in A$ platí $\varrho_{i,k}(c,a) = 1$ a preto $\varrho_{i,k}(c,A) = 1 > 0$.

Pretože systém $(\varrho_{i,k})_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ pseudometrík na X je spočítateľný a spĺňa podmienky (1), (2) a (3) lemy 12.2 (a X je zrejme T_0-priestor) platí, že X je metrizovateľný. □

Veta 12.7. *Ak X je topologický priestor, tak nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

1) Priestor X je metrizovateľný.

2) Priestor X je T_3-priestor a má σ-diskrétnu bázu topológie.

3) Priestor X je T_3-priestor a má σ-lokálne konečnú bázu topológie.

Dôkaz. 1) $\Rightarrow$ 2) Veta 12.6 a vlastnosť T_3 je dokázaná v dôkaze vety 12. 1.

2) $\Rightarrow$ 3) Zrejmé.

3) $\Rightarrow$ 1) Lema 12.3. □

Uvedenú charakterizáciu metrizovateľných priestorov môžeme využiť pri dôkaze nasledujúcej vety.

Veta 12.8. *Každý metrizovateľný kompaktný priestor má spočítateľnú bázu.*

Dôkaz. Nech X je metrizovateľný kompaktný priestor a nech $\mathcal{B}$ je σ-diskrétna báza topológie priestoru X. Potom $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, kde všetky $\mathcal{B}_n$ sú diskrétne systémy podmnožín priestoru X. Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom pre každé $a \in X$ existuje otvorené okolie $U(a)$ tak, že množina $\{V \in \mathcal{B}_n : V \cap U(a) \neq \emptyset\}$ má najviac jeden prvok. Systém $\{U(a) : a \in X\}$ je otvorené pokrytie priestoru X a pretože X je kompaktný, existuje konečná množina $\{a_1, ...a_k\} \subseteq X$ tak, že $\bigcup_{i=1}^k U(a_i) = X$. Pre každé $V \in \mathcal{B}_n \backslash \{\emptyset\}$ vyberme $i_V \in \{1, ..., k\}$ také, že $V \cap U(a_{i_V}) \neq \emptyset$ (také i_v existuje, lebo $\bigcup_{i=1}^k U(a_i) = X$). Ak $V, V' \in \mathcal{B}_n \backslash \{\emptyset\}$ a $V \neq V'$, $V' \cap U(a_{i_V}) = \emptyset$ a preto $i_V \neq i_{V'}$. Teda zobrazenie $f :\ \mathcal{B}_n \backslash \{\emptyset\} \longrightarrow \{1, ..., k\}$, také, že $f(V) = i_V$ je prosté a preto $\mathcal{B}_n$ je konečná množina. Z toho dostávame, že $\mathcal{B}$ je spočítateľná. □

Pretože každý metrizovateľný kompaktný priestor je T_3-priestor so spočítateľnou bázou topológie, podľa dôkazu vety 12.1 je homeomorfný s podpriestorom priestor $[0, 1]^A$, kde A je spočítateľná množina. Z kompaktnosti X vyplýva, že tento podpriestor je uzavretý. Obrátene, každý uzavretý podpriestor priestoru $[0, 1]^A$, kde A je spočítateľná množina, je metrizovateľný kompaktný priestor.

Topologický priestor X sa nazýva *lindelöfovský* ak každé otvorené pokrytie priestoru X obsahuje spočítateľné pokrytie priestoru X. Podobne, ako v dôkaze predchádzajúcej vety možno dokázať, že každý metrizovateľný lindelöfovský priestor má spočítateľnú bázu. Na druhej strane, každý topologický priestor X, ktorý má spočítateľnú bázu je lindelöfovský. Ak $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza priestoru X a $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie priestoru X, tak pre každé $U \in \mathcal{U}$ a $x \in U$ existuje $V_{U,x} \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in V_{U,x} \subseteq U$. Množina $\mathcal{S} = \{V_{U,x} : (U, x) \in \mathcal{U} \times X, x \in U\}$ je spočítateľná, je to pokrytie X a pre každé $V \in \mathcal{S}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ tak, že $V \subseteq U$. Pre každé $V \in \mathcal{S}$ vyberme $U_V \in \mathcal{U}$ tak, že $V \subseteq U_V$. Potom $\{U_V : V \in \mathcal{S}\}$ je spočítateľné pokrytie X obsiahnuté v $\mathcal{U}$.

Teda platí nasledujúca veta.

Veta 12.9. *Metrizovateľný priestor X je lindelöfovský práve vtedy, keď má spočítateľnú bázu topológie.*

Príklad 12.1. *Sorgenfreyova priamka S je príklad lindelöfovského priestoru, ktorý nemá spočítateľnú bázu. Nech $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie priestoru S. Nech $\mathcal{V} = \{int_{\mathbb{R}}(U) : U \in \mathcal{U}\}$, kde $int_{\mathbb{R}}(U)$ označuje vnútro množiny U v priestore $\mathbb{R}$ s prirodzenou topológiou, $X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} int_{\mathbb{R}}(U)$ je podpriestor priestoru $\mathbb{R}$. Pretože X je podpriestor priestoru $\mathbb{R}$, X má spočítateľnú bázu, preto je lindelöfovský. Systém $\mathcal{V}$ je otvorené pokrytie priestoru X a teda existuje spočítateľná podmnožina $\mathcal{S}$ množiny $\mathcal{U}$ taká, že $X = \bigcup_{U\in\mathcal{S}} int_{\mathbb{R}}(U)$. Množina $F = \mathbb{R}\backslash X$ je spočítateľná. Pre každé $a \in F$ vyberme $U_a \in \mathcal{U}$ tak, že $a \in U_a$ a kladné číslo r_a také, že $[a, a + r_a) \subseteq U_a$. Ak $a, b \in F$, $a < b$, tak $[a, a + r_a) \cap [b, b + r_b) = \emptyset$. Ak $[a, a+r_a)\cap[b, b+r_b) \neq \emptyset$, tak $b \in (a, a+r_a) \subseteq int_{\mathbb{R}}(U_a) \subseteq X$ a to je spor. Preto existuje prosté zobrazenie $F \longrightarrow \mathbb{Q}$, ktoré každému $a \in F$ priradí racionálne číslo vybrané z $[a, a + r_a)$. Potom $\mathcal{S} \cup \{U_a : a \in F\}$ je spočítateľné pokrytie S vybrané z $\mathcal{U}$.*

Literatúra

[1] R. Engelking: General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989

[2] J. D. Weston: A short proof of Zorn's Lemma, Archiv der Mathematik, Vol. 8, Issue 4, 1957, p. 279

[3] S. Willard: General Topology, Dover Publications, INC., 2004

[4] Cvičenia zo všeobecnej topológie