Domáca úloha č. 1

Zverejnená 20.9.2021 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v treťom týždni semestra (4.10., 6.10. a 7.10).

Vo všetkých úlohách $\mathbb{N}$ označuje množinu prirodzených čísel, t.j. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Označenie $id_{\mathbb{N}}$ znamená identické zobrazenie na množine $\mathbb{N}$, t.j. zobrazenie $id_{\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ určené predpisom $id_{\mathbb{N}}(n) = n$ (pre každé $n \in \mathbb{N}$).

1. Nájdite príklad zobrazení $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takých, že $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$ a súčasne $g \circ f \neq id_{\mathbb{N}}$, (alebo zdôvodnite, že také zobrazenia neexistujú).

2. Nájdite príklad zobrazenia $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takého, že $f \circ f = id_{\mathbb{N}}$ a súčasne $f \neq id_{\mathbb{N}}$ (alebo zdôvodnite, že také zobrazenie neexistuje).

3. Nájdite príklad zobrazení $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takých, že zložené zobrazenie $g \circ f$ je injekcia ale g nie je injekcia, (alebo zdôvodnite, že také zobrazenia neexistujú).

4. Nájdite príklad zobrazení $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takých, že zložené zobrazenie $g \circ f$ je surjekcia ale f nie je surjekcia, (alebo zdôvodnite, že také zobrazenia neexistujú).

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 2

Zverejnená 27.9.2021 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v štvrtom týždni semestra (11.10., 13.10. a 14.10.).

Zadanie je vo všetkých skupinách: Pred dané permutácie φ a ψ množiny $\{1,2,3,4,5\}$ nájdite permutáciu τ takú, že $\tau \circ \varphi = \psi$. Zistite tiež, či je permutácia τ touto podmienkou určená jednoznačne alebo nie (a svoje tvrdenie zdôvodnite).

1. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ a $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ a $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ a $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ a $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 rieši A–D, 2 rieši E–K, 3 rieši L–R, 4 rieši S–Z

Domáca úloha č. 3

Zverejnená 4.10.2021 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v piatom týždni semestra (18.10., 20.10. a 21.10.).

1. Zistite, či uvedené tvrdenie platí – ak áno, dokážte ho; ak nie, nájdite kontrapríklad.
Nech $(G, *)$ je grupa a $x \in G$. Ak platí $x * x = x$, tak $x = e$; t.j. x je neutrálny prvok.

2. Zistite, či uvedené tvrdenie platí – ak áno, dokážte ho; ak nie, nájdite kontrapríklad.
Nech $(G, *)$ je grupa a $x \in G$. Ak platí $x = x^{-1}$, tak $x = e$; t.j. x je neutrálny prvok.

3. Zistite, či uvedené tvrdenie platí – ak áno, dokážte ho; ak nie, nájdite kontrapríklad.
Nech $(G, *)$ je grupa a $x \in G$. Ak platí $x * x = e$, tak $x = e$; t.j. x je neutrálny prvok.

4. Zistite, či uvedené tvrdenie platí – ak áno, dokážte ho; ak nie, nájdite kontrapríklad.
Nech $(G, *)$ je grupa a $x, y \in G$. Ak platí $x * x = y * y$, tak $x = y$.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 4

Zverejnená 11.10.2021 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v šiestom týždni semestra (25.10., 27.10. a 28.10.).

1. Overte, či množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (bd - ac, ad + bc)$$

je pole.

2. Overte, či množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc - bd)$$

je pole.

3. Overte, či množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

je pole.

4. Overte, či množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

je pole.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 5

Zverejnená 19.10.2021 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach 8.11., 3.11. a 4.11. (Pretože 1.11. je štátny sviatok, pondelková skupina má termín posunutý na nasledujúci pondelok.)

1. Zistite, či $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ je vektorový priestor ak definujeme $(a, b) + (c, d) = (a + c, 0)$ a $r \cdot (a, b) = (ra, 0)$ pre $a, b, c, d, r \in \mathbb{R}$.

2. Zistite, či $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $r \cdot (a, b) = (ra, 2rb)$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

3. Zistite, či $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ je vektorový priestor ak definujeme $(a, b) + (c, d) = (a + c, 0)$ a $r \cdot (a, b) = (ra, b)$ pre $a, b, c, d, r \in \mathbb{R}$.

4. Zistite, či $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, ak definujeme $x \oplus y = xy$, $c \odot x = x^c$ pre $x, y \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 rieši A–D, 2 rieši E–K, 3 rieši L–R, 4 rieši S–Z

Domáca úloha č. 6

Zverejnená 25.10.2021 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach 8.11., 10.11. a 11.11.

Vo všetkých 4 skupinách je zadanie rovnaké: Pre dané podmnožiny S, T priestoru $V = \mathbb{R}^4$ (nad poľom $\mathbb{R}$) rozhodnite, či ide o vektorové podpriestory. (Svoje tvrdenie aj zdôvodnite.)

1. $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; |a| = |b| = |c| = |d|\}$ a $T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a = b = c = d\}$.

2. $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; a^2+b^2+c^2+d^2 = 0\}$ a $T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a+b+c+d = 0\}$.

3. $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; |a| - |b| + |c| - |d| = 0\}$ a $T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a - b + c - d = 0\}$.

4. $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; a^2+b^2-c^2-d^2 = 0\}$ a $T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a+b-c-d = 0\}$.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 7

Zverejnená 25.10.2021 – termín a spôsob odovzdávania určí cvičiaci.

Vo všetkých 4 skupinách je zadanie rovnaké: Pre dané vektory z priestoru $(\mathbb{Z}_7)^4$ rozhodnite, či sú lineárne závislé alebo lineárne nezávislé.

1. $(1,4,3,1)$, $(2,3,1,2)$, $(1,1,2,3)$, $(1,6,4,0)$

2. $(1,4,3,1)$, $(2,3,1,2)$, $(1,1,2,3)$, $(1,1,1,2)$

3. $(1,4,3,1)$, $(3,4,2,4)$, $(1,1,2,3)$, $(2,0,5,2)$

4. $(3,0,4,3)$, $(2,3,1,2)$, $(2,2,3,5)$, $(1,1,1,2)$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 rieši A–D, 2 rieši E–K, 3 rieši L–R, 4 rieši S–Z

Domáca úloha č. 8

Zverejnená 16.11.2021 - odovzdáva sa najneskôr v deň cvičenia 29.11., 1.12. a 2.12. (Spôsobom, ktorý máte v jednotlivých skupinách dohodnutý s cvičiacim.)

Zadanie je vo všetkých skupinách rovnaké: Sú zadané 4 matice nad poľom $\mathbb{Z}_7$. Vašou úlohou je rozhodnúť, ktoré z nich sú riadkovo ekvivalentné.

1. $\begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&1&2&0\\3&4&5&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&6&3\\2&1&2&5\\1&3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&2&6\\2&2&3&3\\3&5&5&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&2&4\\2&3&4&3\\1&3&4&4\end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix}1&2&0&2\\1&3&1&1\\4&4&6&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3&0&5\\2&1&4&5\\3&4&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1&4&5\\3&1&5&0\\2&3&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&4&1\\2&4&4&1\\3&1&1&3\end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix}2&1&1&5\\1&2&3&0\\5&1&1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&1&5\\1&2&2&0\\2&1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&6&3\\2&4&2&6\\3&1&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&3&5\\2&1&3&6\\3&1&1&1\end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix}1&3&3&3\\3&1&4&5\\2&2&3&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3&0&5\\3&1&5&0\\2&3&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3&1&0\\3&1&5&0\\1&4&2&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1&1&5\\1&3&3&3\\1&0&5&4\end{pmatrix}.$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 rieši A–D, 2 rieši E–K, 3 rieši L–R, 4 rieši S–Z

Domáca úloha č. 9

Zverejnená 24.11.2021 - odovzdáva sa najneskôr v deň cvičenia 6.12., 8.12. a 9.12. (Spôsobom, ktorý máte v jednotlivých skupinách dohodnutý s cvičiacim.)

Zadanie vo všetkých skupinách: Vypočítajte hodnosť parametra v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{pmatrix} c & c+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} c & c+1 & -1 \\ -c & -c & 1 \\ 1 & c & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} c & c+1 & -1 \\ -c & 1 & c \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & c+1 & c+2 \\ -c & c+1 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 10

Zverejnená 6.12.2021 – odovzdáva sa najneskôr v deň cvičenia 13.12., 15.12. a 17.12. (Spôsobom, ktorý máte v jednotlivých skupinách dohodnutý s cvičiacim.)

Zadanie vo všetkých skupinách: Nájdite aspoň jedno lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^3$ spĺňajúce uvedené podmienky, ak také zobrazenie existuje. Napíšte maticu zobrazenia f.

1. $f(1,4,3,1) = (1,2,6)$, $f(3,2,1,1) = (0,5,5)$, $f(1,0,3,3) = (1,2,2)$, $f(1,1,1,1) = (2,0,4)$.

2. $f(1,4,3,1) = (1,2,6)$, $f(3,2,1,1) = (0,5,5)$, $f(1,0,3,3) = (1,2,2)$, $f(1,1,1,6) = (2,0,4)$.

3. $f(1,4,3,1) = (1,2,6)$, $f(4,6,4,2) = (1,0,4)$, $f(3,3,5,4) = (5,2,4)$, $f(1,1,1,6) = (2,1,4)$.

4. $f(1,4,3,1) = (1,2,6)$, $f(4,6,4,2) = (1,0,4)$, $f(3,3,5,4) = (5,2,4)$, $f(1,1,1,6) = (2,0,4)$.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 11

Zverejnená 6.12.2020 – odovzdáva sa najneskôr v piatok 24.12.

V každej skupine je úlohou vyriešiť sústavu určenú zadanou maticou nad poľom $\mathbb{R}$ a aj **zapísať množinu riešení**.

1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

4.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z