Permutácie

10. marca 2022

Permutácie

- M je nejaká konečná množina.
- Permutácia množiny M = bijekcia $M \to M$.
- Často berieme $M = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Dvojriadkový zápis

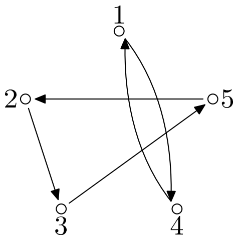


Figure: Príklad permutácie 5-prvkovej množiny.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Permutácie

Grupa $(S_n, \circ)$

Množina S_n s operáciou skladania tvorí grupu, ktorá sa nazýva *symetrická grupa*.

- Zloženie dvoch permutácií je permutácia.
- Skladanie zobrazení je asociatívne.
- Identické zobrazenie je permutácia.
- Inverzné zobrazenie k permutácii je permutácia.

Definícia cyklu

Definícia

Permutáciu φ konečnej množiny M nazveme *cyklus,* alebo *cyklická permutácia* ak existujú prvky $a_1, a_2, \ldots, a_k$ také, že

$$\begin{cases} \varphi(a_i) = a_{i+1} \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, k-1, \\ \varphi(a_k) = a_1, \\ \varphi(a) = a \text{ pre ostatné prvky } a \neq a_i. \end{cases}$$

Pre cyklus tohoto tvaru budeme používať zápis $(a_1 a_2 \ldots a_k)$.
V definícii cyklu pripúšťame aj nulový počet prvkov. *Prázdny cyklus,* ktorý označujeme $()$, sa rovná identickej permutácii.

Disjunktné permutácie komutujú

Definícia

Dve permutácie φ a τ tej istej množiny M nazveme *disjunktné*, ak pre každý prvok $a \in M$ platí $\varphi(a) = a$ alebo $\tau(a) = a$. (Teda každý prvok zostáva nezmenený pri aspoň jednej z týchto dvoch permutácií.)

Lema

Ak φ a τ sú disjunktné permutácie, tak

$$\varphi \circ \tau = \tau \circ \varphi.$$

Disjunktné permutácie komutujú

Príklad

Vo všeobecnosti permutácie nemusia komutovať:

$$\varphi \circ \tau = (1352) \qquad \text{a} \qquad \tau \circ \varphi = (1235).$$

Rozklad na súčin disjunktných cyklov

Tvrdenie

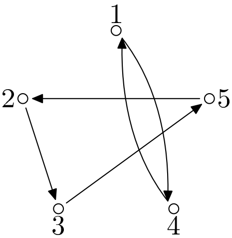
Každú permutáciu možno zapísať ako zloženie disjunktných cyklov. Tento zápis je jednoznačný až na poradie cyklov (a vynechanie prázdneho cyklu a jednoprvkových cyklov). Nazývame ho rozklad permutácie na súčin disjunktných cyklov.

Rozklad na súčin disjunktných cyklov

Príklad

Pre permutáciu $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dostaneme rozklad $\varphi = (14)(235)$.

Z toho vieme hneď zistiť aj $\varphi^{-1} = (14)(253)$.



Rád permutácie

Definícia

Ak φ je permutácia konečnej množiny M, tak *rád permutácie* φ je najmenšie prirodzené číslo $n \geq 1$ také, že

$$\varphi^n = id_M.$$

Je to vlastne rád prvku φ v grupe S_n.

Rád permutácie

Lema

Rád cyklu je rovný jeho dĺžke, t.j. ak $\varphi = (a_1 \dots a_n)$, tak rád φ je rovný n.

Veta

Rád permutácie je najmenší spoločný násobok dĺžok disjunktných cyklov, ktoré vystupujú v jej rozklade.

Rád permutácie

Príklad

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (14)(235)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= (14)(235) \\ \varphi^2 &= (253) \\ \varphi^3 &= (14) \\ \varphi^4 &= (235) \\ \varphi^5 &= (14)(253) \\ \varphi^6 &= id \end{aligned}$$

Parita a inverzie

Definícia

Dvojica $(\varphi(k), \varphi(s))$ sa volá *inverzia* permutácie φ, ak $k < s$ ale $\varphi(k) > \varphi(s)$.
Ak má permutácia φ párny počet inverzií, hovoríme, že je to *párna permutácia,* v opačnom prípade hovoríme o *nepárnej permutácii.*

Parita a inverzie

Príklad

Permutácia $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ má 7 inverzií: (4,3), (4,1), (4,2), (3,1), (3,2), (5,1) a (5,2). Teda táto permutácia je nepárna.

Transpozície

Definícia

Permutáciu tvaru $(a_1 a_2)$ (t.j. dvojprvkový cyklus) budeme nazývať *transpozícia.*

Každá transpozícia je nepárna permutácia.

Rozklad na transpozície

- Každý cyklus sa dá napísať ako zloženie transpozícií.
- Každá permutácia sa dá napísať ako zloženie transpozícií.

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \dots (a_1 a_2)$$

Transpozície a parita

Zloženie s transpozíciou mení paritu

$$\varphi \circ (ij) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \varphi(1) & \dots & \varphi(i) & \dots & \varphi(j) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} (ij)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \varphi(1) & \dots & \varphi(j) & \dots & \varphi(i) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Transpozície a parita

Tvrdenie

Každú permutáciu možno zapísať ako zloženie transpozícií. Navyše, pri každom takomto zápise je parita počtu transpozícií rovná parite permutácie. (Teda permutácia je párna práve vtedy, keď ju je možné získať zložením párneho počtu transpozícií. Permutácia je nepárna práve vtedy, keď sa dá dostať zložením nepárneho počtu transpozícií.)

Parita a skladanie

Dôsledok

Zložením dvoch permutácií rovnakej parity dostaneme párnu permutáciu. Zložením párnej a nepárnej permutácie dostaneme nepárnu permutáciu.

$$\mathrm{P} \circ \mathrm{P} = \mathrm{P}$$
$$\mathrm{P} \circ \mathrm{N} = \mathrm{N}$$
$$\mathrm{N} \circ \mathrm{P} = \mathrm{N}$$
$$\mathrm{N} \circ \mathrm{N} = \mathrm{P}$$

Parita a skladanie

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (14)(235)$$

$$\mathrm{N} \circ \mathrm{P} = \mathrm{N}$$

Podgrupa A_n

Dôsledok

Párne permutácie tvoria podgrupu grupy S_n. Grupu tvorenú párnymi permutáciami množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ budeme označovať A_n a nazývať alternujúca grupa.